Analyse d'écoulements à partir de champs d'observables échantillonés à des temps arbitraires

F. Guéniat[1,2],L. Mathelin[2] & L. Pastur[1,2]

[1] Université Paris-Sud 11, F-91405 Orsay Cedex
[2] LIMSI-CNRS BP 133, F-91403 Orsay Cedex
florimond.gueniat@limsi.fr

Résumé. Plusieurs techniques existent pour l'analyse d'écoulements instationnaires comme la célèbre Décomposition Orthogonale Propre (POD en anglais) ou, plus récemment, la Décomposition en Modes Dynamiques (DMD). Cette dernière technique s'appuie sur un ensemble de vecteurs d'observables du système échantillonné tous les Δt, introduisant *de facto* une fréquence d'échantillonnage fixe. Dans ce travail, nous présentons une approche permettant l'extraction de modes dominants, similaires aux modes DMD, sans la limitation à un échantillonnage fixe. Cette approche permet une utilisation plus flexible de cette classe de méthodes et élargit significativement son spectre d'application.

Abstract. Several tools are readily available for analysis of unsteady fluid flows such as the celebrated Proper Orthogonal Decomposition (POD) or, the more recently introduced, Dynamic Modes Decomposition (DMD), [3]. Dynamic Modes Decomposition relies on a set of observable vectors acquired every Δt in time, *de facto* introducing a sampling frequency.
In this work, we use an approach to extract DMD-like modes which naturally copes with the sampling limitations mentioned above.

1 Motivation

Un système physique ouvert possède, potentiellement, un nombre infini de degrés de liberté. Néanmoins, les écoulements sont le plus souvent organisés autour de structures cohérentes qui jouent un rôle décisif dans la dynamique. On peut par exemple penser aux grandes structures tourbillonnaires des allées de von Karman, que l'on observe aussi bien dans des expériences de laboratoire que dans le sillage de structures à grande échelle telles que des navires ou des îles, pour lesquels les nombres de Reynolds sont très grands et la turbulence pleinement développée. Ces structures invitent à chercher des moyens de réduction de la dimension effective des écoulements considérés.

Une idée classique est de rechercher une base vectorielle, constituée de modes, capable de décrire les réalisations $\boldsymbol{u}$ du champs mesuré. Ce champ possède une structure dans l'espace, $\boldsymbol{r}$, et évolue dans le temps, t. Dans l'hypothèse de séparation des variables d'espace et de temps, on cherche alors à écrire $\boldsymbol{u}$ sous la forme :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{i \geq 1} a_i(t) \boldsymbol{\psi}_i(\boldsymbol{r}), \tag{1}$$

la base des $\{\boldsymbol{\psi}_i\}$ (ou des $\{a_i\}$) étant a priori de dimension infinie, discrète ou continue. Dans l'optique d'une réduction de modèle et, plus généralement, dans les méthodes de Galerkin, on se restreint à un ensemble fini de modes :

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{i \in \mathcal{S}} a_i(t) \boldsymbol{\psi}_i(\boldsymbol{r}),$$

où $\tilde{\boldsymbol{u}}$ est une approximation du champ $\boldsymbol{u}$. Lorsque les conditions aux limites sont homogènes, une base naturelle est donnée par les modes de Fourier. Dans des problèmes aux conditions aux limites plus complexes, on peut recourir à des méthodes empiriques de décomposition suivant les axes principaux de l'ensemble des données (modes POD), ou rechercher des champs solutions des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un état de base stationnaire (modes globaux). Récemment, Schmid [1] et Rowley [2] ont proposé une nouvelle méthode de décomposition, la Dynamic Modes Decomposition (DMD) basée sur l'hypothèse de l'existence d'un opérateur de Koopman [3], permettant théoriquement d'extraire directement les informations de la dynamique (non-linéaire) de l'écoulement en régime permanent instationnaire. L'algorithme standard de cette dernière méthode utilise un ensemble de vecteurs observables, mesurés à intervalles de temps réguliers, introduisant *de facto* une fréquence d'échantillonnage. Le pas de temps Δt doit être suffisamment petit pour résoudre les petites échelles temporelles de la dynamique. De l'ensemble ordonné de ces vecteurs résulte une matrice de Krylov dont sont extraits, par la DMD, les modes physiquement pertinents.

Néanmoins, lors du processus d'acquisition, ce type de contrainte peut poser des difficultés. A titre d'exemple, considérons la situation classique, en mécanique des fluides, où l'observable est un champ à deux composantes, de dimension deux (2D2C), mesuré par *Particule Imagery Velocimetry* (PIV). En PIV, les tailles standards sont des champs de 1000 $\times$ 1000 pixels. Supposons que la fréquence pertinente la plus élevée soit à 200 Hz (situation très optimiste en écoulement turbulent), le critère de Shannon-Nyquist impose alors une fréquence d'échantillonnage supérieure à 400 Hz. Avec des images de 12-bit, la bande passante ainsi nécessaire est supérieure à 1 Gb/s.

De plus, si le spectre de Fourier de la dynamique est à large bande, la durée de l'acquisition de données doit être importante. La combinaison d'une haute fréquence d'échantillonnage et d'une longue durée d'acquisition conduit à des contraintes sévères, tant pour le matériel de mesure que pour les ressources de traitements de données et de stockage.

De surcroît, certaines mesures de l'observable peuvent être corrompues, par des causes internes ou externes à l'expérience, par exemple au niveau du matériel, ou par la non-convergence d'un algorithme de pré-traitement. Les faux vecteurs en PIV sont une illustration de ce problème. S'il est souvent possible de remplacer les données manquantes ou corrompues, par diverses techniques telle la gappy-POD, de l'information non physique risque d'être introduite, en particulier dans le contenu spectral.

Dans ce papier, nous présentons une nouvelle technique pour extraire une décomposition approchant les modes DMD, sans que les contraintes précédentes n'influent sur la robustesse de l'algorithme. Nous illustrerons cette méthode sur un champ de données provenant de PIV. Dans cette contribution, nous présentons une méthode permettant de calculer des modes similaires aux modes DMD, mais pour des données échantillonnées quasi-aléatoirement.

2 Algorithme DMD

Présentons tout d'abord l'algorithme DMD. Pour que la méthode puisse s'appliquer, il faut supposer qu'il existe un opérateur d'évolution A de la dynamique agissant sur un ensemble d'observables $\boldsymbol{u}(t)$, c'est–à–dire :

$$\boldsymbol{u}\left(t_{i+1}\right) =: \boldsymbol{u}_{i+1} = A\,\boldsymbol{u}_i \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

La méthode revient à décomposer l'opérateur, en recherchant ses modes propres ϕ_i et valeurs propres λ_i. En ayant à disposition ces informations et en supposant que ce spectre est suffisement riche, et donc que les fonctions propres associées forment une base de l'espace des phases, on pourra facilement remonter à l'équation (1) :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_i &= A^i \boldsymbol{u}_0,\\ &= \textstyle\sum_k \nu_{k0} \lambda_k^i \Phi_k,\end{aligned}$$

où les ν_{k0} sont les coefficients de projection du premier champ sur la base des modes. ϕ_i et λ_i sont estimés en décomposant une matrice similaire à l'opérateur d'évolution A.Présentons tout d'abord une décomposition basée sur la détermination d'une matrice compagnon, plus facilement appréhendable.

On suppose :

$$\boldsymbol{u}_N = c_0\boldsymbol{u}_0 + c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_{N-1}\boldsymbol{u}_{N-1},$$

d'où, en notant K_0^{N-1} l'espace de Krylov $\{\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{N-1}\}$

$$AK_0^{N-1} = K_1^N C + \boldsymbol{r} \ \text{ avec } \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & c_{N-1} \end{pmatrix},$$

C est donc, dans le cas d'un résidu nul, une matrice similaire à l'opérateur, et pourtant de dimensions réduites.

L'algorithme DMD de Schmid, pour obternir une matrice similaire, est subtilement différent. On commence par décomposer par SVD la matrice de Krylov :

$$K_0^{N-1} = U\Sigma V^H$$

On introduit dans l'équation $AK_0^{N-1} = K_1^N$:

$$AU = K_1^N V\Sigma^{-1}$$

avec $K_1^N := \{A\,\boldsymbol{u}_0, A\,\boldsymbol{u}_1, A\,\boldsymbol{u}_2, \ldots, A\,\boldsymbol{u}_{N-1}\}$. En multipliant à gauche par U^H :

$$U^H AU = U^H K_2^{N+1} V\Sigma^{-1} \equiv C$$

C est une matrice similaire de à A. A n'étant pas connu explicitement (seule son *action* sur certains vecteurs est connue), cette approche permet de se ramener á l'approximation d'un opérateur linéaire connu et de petite taille, C.

Les valeurs propres λ_i de la matrice similaire C sont des valeurs propres de A. En effet, prenons λ une valeur propre de C, et ν un vecteur propre associé :

$$\begin{aligned} AK_1^N\nu &= K_1^N C\nu \\ &= K_1^N \lambda\nu \\ &= \lambda K_1^N \nu \\ A\left(K_1^N\nu\right) &= \lambda\left(K_1^N\nu\right) \end{aligned}$$

Des vecteurs propres ν_i de la matrice similaire – par exemple la matrice compagnon – C sont donc déduits des vecteurs propres ϕ_i de A par $\boldsymbol{\phi}_i \equiv K_1^N \boldsymbol{\nu_i}$

3 Algorithme NU-DMD

L'objectif principale est déduire de l'écoulement une décomposition spectrale de dimension finie. A cette fin, on peut fixer par avance la forme de la décomposition à obtenir. On peut rechercher une décomposition similaire à la DMD, c'est-à-dire décomposer $\boldsymbol{u}$ sous la forme :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) \approx \sum_{k=1}^{N_m} \mathrm{e}^{i\,\sigma_k\,t}\,\boldsymbol{\phi}_k(\boldsymbol{x}) \equiv \sum_{k=1}^{N_m} \lambda_k^t \boldsymbol{\phi}_k(\boldsymbol{x}), \tag{2}$$

avec N_m le nombre de modes choisis pour la décomposition.

La méthode repose sur l'analyse d'un jeu de données : $\{\boldsymbol{u}_{t_i}\}_{i=1}^N$, $t_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$. Les temps t_i sont arbitraires, et non nécessairement ordonnés. Ces N champs de données seront utilisées sous la forme d'une pseudo matrice de Krilov $\mathbb{R}^{N_p\times N} \ni K := (\boldsymbol{u}_{t_1}\,\boldsymbol{u}_{t_2}\,\ldots\,\boldsymbol{u}_{t_N})$. Les champs de données $\{\boldsymbol{u}_{t_i}\}_{i=1}^N$ sont représentés sous forme de vecteurs.

On recherche des modes tels que, d'après (2),

$$\boldsymbol{u}_{t_i} \approx \lambda_1^{t_i} \boldsymbol{\phi}_1 + \lambda_2^{t_i} \boldsymbol{\phi}_2 + \ldots + \lambda_{N_m}^{t_i} \boldsymbol{\phi}_{N_m}$$

Ce que l'on peut réécrire matriciellement :

$$K = M\,V + R \approx M\,V, \tag{3}$$

Où R est une matrice de résidu, $V \in \mathbb{C}^{N_m \times N}$ est une pseudo matrice de Vandermonde :

$$V := \begin{pmatrix} \lambda_1^{t_1} & \lambda_1^{t_2} & \ldots & \lambda_1^{t_N} \\ \lambda_2^{t_1} & \lambda_2^{t_2} & \ldots & \lambda_2^{t_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N_m}^{t_1} & \lambda_{N_m}^{t_2} & \ldots & \lambda_{N_m}^{t_N} \end{pmatrix},$$

et finalement $M \in \mathbb{C}^{N_p \times N_m}$ une matrice contenant les modes spatiaux :

$$M := \left(\boldsymbol{\phi}_1 \ldots \boldsymbol{\phi}_{N_m}\right).$$

Pour écrire (2), il faut avoir accès aux deux matrices qui viennent d'être définies, la pseudo Vandermonde V et la matrice des modes M. On peut facilement trouver une approximation de cette dernière :

$$M \approx K\,V^{+}, \tag{4}$$

où V^{+} est la pseudo-inverse de Moore-Penrose de V. En suivant un raisonnement similaire à celui décrit dans [4], on peut substituer l'écriture de la matrice M dans (3), pour obtenir $K \approx K\,V^{+}\,V + R$. Déterminer V s'obtient alors en minimisant une norme de la matrice des résidus R :

$$R \approx K\,\left(I_N - V^{+}\,V\right).$$

On peut alors déteminer la pseudo Vandermonde V par minimisation de la norme de la matrice résidu R. Les modes se déduisent alors de (4).

4 Résultats

Pour illustrer la méthode, nous allons nous appuyer sur un écoulement ouvert et turbulent. La configuration choisie est un écoulement affleurant sur une cavité ouverte 1. Ce type de configuration permet de tester la pertinence de l'algorithme sur un écoulement présentant un spectre piqué.

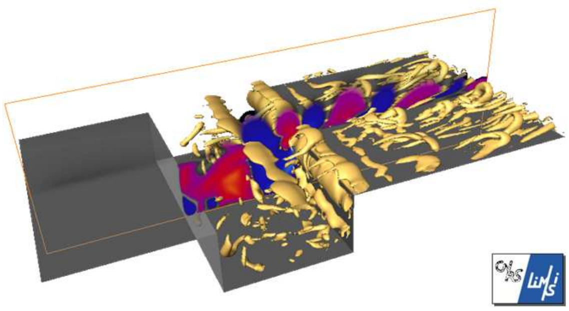


Figure1. Vue de l'écoulement, simulation numérique 3D

Dans la suite, nous utiliserons une série de données experimentale 2D2C, résolue en temps, sous forme de champs de vitesse dans un plan de coupe. Plus d'informations sur le protocole experimental et sur les configurations de l'écoulement peuvent être lus dans [5]. La méthode présentée précedemment, que l'on nommera NU-DMD (Non Uniform Dynamic Modes Decomposition) a été appliqué sur un jeu de champs de données, pris *au hasard* sur la totalité de la base de données PIV, donc avec un intervalle de temps entre deux champs aléatoire. Les champs PIV sont compréssés de 10^6+ à 7500 observables (sous forme de vecteurs), et la base de données contient 5500 champs de données.

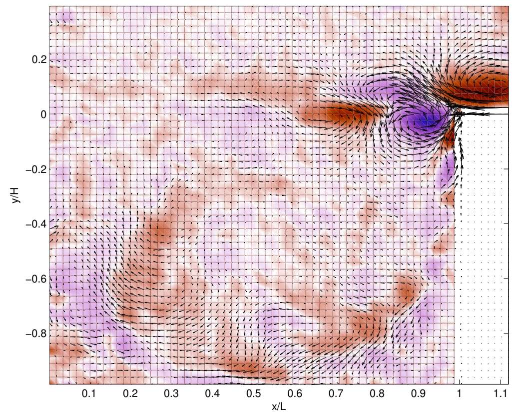
Une comparaison entre la DMD et la NU-DMD est présenté dans le tableau 1 en termes de fréquence du mode dominan. L'algoritme DMD utilise les N premiers vecteurs de la base de données, tandis que la NU-DMD utilisera N vecteurs pris au hasard dans la base de données.

N	12	28	38	65	90	200	500	1000
DMD	20.8	26.8	26.3	26.9	27.8	27.5	27.0	27.0
NU-DMD	27.0	27.0	27.0	27.0	27.0	27.0	27.0	27.0

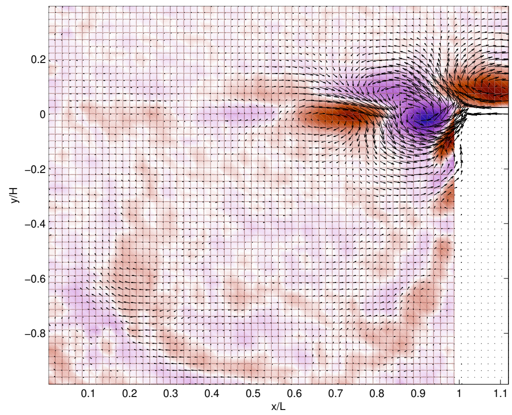
Table1. Précision de l'identification de la fréquence dominante de l'écoulement corrélée à $Nsnap$ le nombre de champs utilisé.

On notera que la DMD ne peut identifier le mode dominant avec moins de 500 champs, contrairement à la NU-DMD, qui est capable d'identifier avec précision la fréquence (27.0Hz), ce même pour seulement 12 champs utilisés.

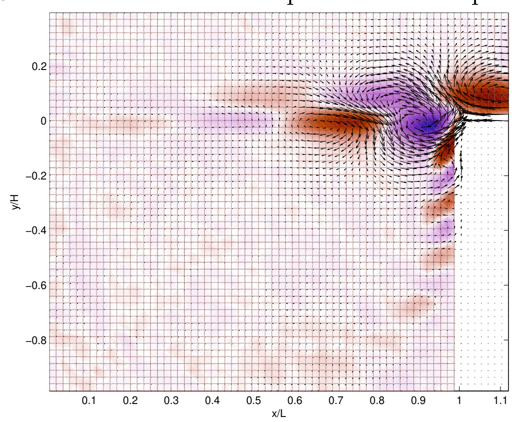
La NU-DMD permet d'identifier des structures comparables à l'approche DMD standard, voir Figure 4.



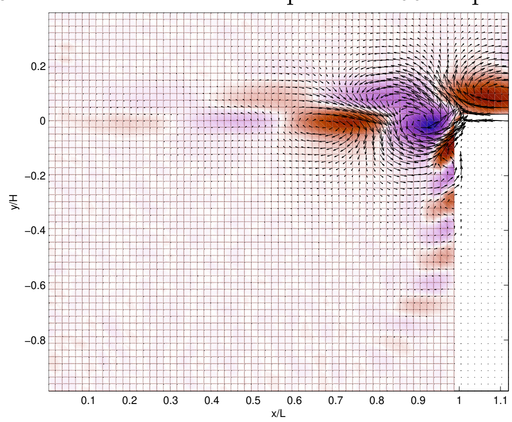
NU-DMD. Mode obtenu à partir de 12 snapshots



NU-DMD. Mode obtenu à partir de 65 snapshots



NU-DMD. Mode obtenu à partir de 500 snapshots



DMD Mode obtenu à partir de 500 snapshots

Bien sûr, moins la quantité d'information est grande (N), moins la qualité de la détermination du mode est bonne. Néanmoins, la fréquence du mode dominant est correctement estimée avec aussi peu que $N = 12$ alors que $N \geq 500$ semble nécessaire pour la technique DMD standard. Par ailleurs, les structures principales restent nettement visibles. L'oscillation de la couche cisaillée est bien capturée, y compris la longueur d'onde et la réinjection de matière dans la cavité.

5 Conclusion

Lorsque, pour des contraintes liées à un écoulement ou à une expérience, l'aquisition de champs de données ne peut être uniforme dans le temps, l'algorithme DMD ne peut être utilisée.
L'algorithme présenté ci-dessus, la NU-DMD, peut quand à lui toujours identifier les structures dominantes de l'écoulement. De plus, seulement quelques champs de données sont nécessaires pour que les structures émèrgent avec cette technique.

La NU-DMD est donc une outil pratique, au champ d'application large, permettant d'explorer les caractéristiques physiques d'un jeu d'observables, ce quelque soit les contraintes sur les données (peu de données, champs de données manquants, échantillonage aléatoire).

Références

1. P.J. Schmid, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, *J. Fluid Mech.*, **656**, p. 5–28, 2010.
2. C. W. Rowley, I. Mezic, S. Bagheri, P. Schlatter & D. S. Henningson, Spectral analysis of nonlinear flows, *Journal of Fluid Mechanics* **641**, pp. 115-127 (2009)
3. B.O. Koopman, Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **17**, pp 315-318 (1931)
4. K. Chen, J.H. Tu & C.W. Rowley, Variants of dynamic mode decomposition : connections between Koopman and Fourier analyses, *Journal of Nonlinear Science*, submitted, 2011.
5. J. Basley and *al.* : Experimental investigation of global structures in an incompressible cavity flow using time-resolved PIV, *Experiment in Fluids*, **50**, pp – 905–918