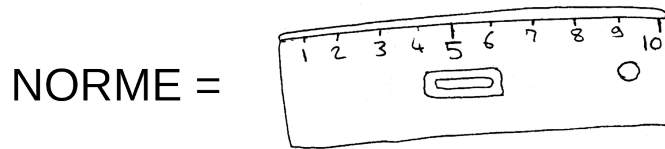


TP Matlab 1

Introduction et rappel

1.1 Rentrer dans la norme

La norme est un outil mathématique permettant de définir la longueur d'un objet.



Soit un vecteur $\mathbf{v} \in \mathcal{M}_{n,1}$, tel que $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$. La norme p de \mathbf{v} est :

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

La norme p d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est :

$$\|A\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} = \max_{\|\mathbf{x}\|_p = 1} \|A\mathbf{x}\|_p \quad (1.1)$$

Cette norme est usuellement difficile à calculer. Il existe néanmoins des formules pour la norme 1, 2 et ∞ . Si $A = \{a_{ij}\}$:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (1.2)$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (1.3)$$

Quand à la norme 2, on a le résultat suivant :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)} \quad (1.4)$$

$\rho(M)$ est le rayon spectral de la matrice M , c'est-à-dire la plus grande (au sens de la valeur absolue) valeur propre de M .

1.1.1 Questions

Sur la norme d'un vecteur

- a) Calculez la norme p du vecteur $\mathbf{v} = [1, 1, 1, 1, 1]$ pour $p \in \{1, \dots, 5\}$ et pour $p = \infty$.
Soit \mathbf{v} un vecteur du plan, ie $\mathbf{v} = (x, y)$.
- b) Quelles sont les conditions sur x et y pour que $\|\mathbf{v}\|_1 = 1$? Fabriquez une liste de 500 points qui approxime le cercle unité pour la norme 1.
- c) Quelles sont les conditions sur x et y pour que $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$? Fabriquez une liste de 500 points qui approxime le cercle unité pour la norme 2.
- d) Quelles sont les conditions sur x et y pour que $\|\mathbf{v}\|_\infty = 1$? Fabriquez une liste de 500 points qui approxime le cercle unité pour la norme ∞ .
- e) Affichez les 3 cercles unités sur la même figure, avec trois couleurs différentes.
- f) Faites un script permettant d'afficher un point si sa norme p est inférieur à 1.
- g) Utilisez ce script pour comparer les disques unité (en affichant quelques milliers de points) des normes 1, 2, 10, 30 et ∞ .

Sur la norme d'une matrice Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{2,2}$, par exemple $A = \begin{pmatrix} 2.2 & -1.5 \\ 0.7 & 1.2 \end{pmatrix}$

- h) Estimez $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ et $\|A\|_\infty$ en utilisant la formule (1.1) et les listes calculées précédemment.
- i) Comparer avec $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ et $\|A\|_\infty$ issues des formules (1.2),(1.3) et (1.4).
- j) Comparer avec $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ et $\|A\|_\infty$ calculées en utilisant la fonction *norm*.

1.2 Annexe : Commandes matlab

Annexe partiellement inspirée par le cours de Jussieu

1.2.1 Vecteurs

Définir un vecteur

Pour un vecteur colonne :

`v=[2;3;7]`

Pour un vecteur ligne complexe :

`v=[2, -3+i, 7]`

Pour un vecteur de composantes à incrément constant :

`v=1:0.1:5`

Opération sur les vecteurs

Addition :

`a+b`

Transposition :

`v'`

Multiplication membre à membre :

`a.*b`

1.2.2 Matrices

Les matrices suivent la même syntaxe que les vecteurs. Les composantes des lignes sont séparées par des virgules et chaque ligne est séparée de l'autre par un point virgule.

`A=[1,2,3;5,7,10;-2,9+i,0]`

1.2.4 Graphisme

Pour afficher une courbe, il suffit d'utiliser la fonction *plot*. On peut ajouter des options.

Quelques exemples :

```
x = -2:.01:2;      x = -2:.01:2;      x = -2:.01:2;      x = -2:.01:2;
y=x.^2;           y=x.^2;           y=x.^2;           y=x.^2;
plot(x,y)         // couleur       // tirets         // tirets et couleur
                  plot(x,y,'r')       plot(x,y,'-')     plot(x,y,'--r')
```

les options possibles sont :

r	rouge	-	tirets
k	noir	.	pointillés
b	bleu	d	diamants
m	magenta	*	étoiles
c	cyan	+	croix
y	jaune	x	croix
g	vert	-	ligne

Pour tracer plusieurs courbes, il faut dire à matlab de ne pas effacer la précédente, à l'aide de l'instruction *hold*.

```
x1 = -2:.01:2;
y1=x1.^2;
x2 = -2:.01:2;
y2=0.9*x2.^2+0.5;
plot(x1,y1,'k-')
hold on
plot(x2,y2,'r--')
hold off
```

Pour ajouter un titre et des légendes aux axes, on utilise les instructions *title*, *xlabel*, *ylabel*

```
x = -2:.01:2;
y=x.^2;
plot(x,y,'k-')
xlabel('axe des x')
ylabel('axe des y')
title('une jolie courbe')
```

1.2.5 Autres

Quelques fonctions importantes :

sum(A,dim)	rend la somme du tableau A dans la direction dim
ones(i,j)	créé un tableau de i lignes j colonnes contenant des 1
zeros(i,j)	créé un tableau de i lignes j colonnes contenant des 0
eye(i,j)	créé un tableau de i lignes j colonnes avec des 1 sur la diagonale principale et 0 ailleurs
diag(u)	créé une matrice carrée avec le vecteur u sur la diagonale et 0 ailleurs
diag(U)	extraite la diagonale de la matrice U
triu(A)	renvoie la partie supérieure de A
tril(A)	renvoie la partie inférieure de A
linspace(a,b,n)	créé un vecteur de n composantes uniformément réparties de a à b
A\b	résolution du système linéaire Ax = b
cond(A)	conditionnement d'une matrice (norme euclidienne)
det(A)	déterminant d'une matrice
rank(A)	rang d'une matrice
inv(A)	inverse d'une matrice
norm(A,p)	norme p vectorielle
u - v	soustraction matricielle
u./v	division du tableau u par le tableau v terme à terme
find	indices des composantes satisfaisant une condition