

DMD économique et Observabilité dynamique

F. Guéniat – M. Delorme – L.R. Pastur – F. Lusseyran

CONTACT : FLORIMOND.GUENIAT@LIMSI.FR

Contribution

Il est courant, en dynamique des systèmes spatio-temporels, de rechercher une base de fonctions tests $\Psi(\vec{r})$ pour décrire toute réalisation d'une observable $\mathbf{u}(\vec{r}, t)$:

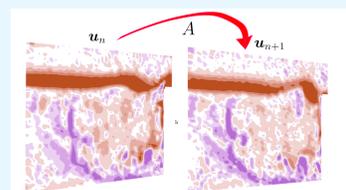
$$\mathbf{u}(\vec{r}, t) = \sum_i \alpha_i(t) \Psi_i(\vec{r})$$

Cet objectif est atteint, par exemple, par la décomposition en modes dynamiques[1, 2]. Néanmoins, dans le cas de grands jeux de données, *eg* issues de simulations numériques 3D, la mémoire et la puissance de calcul requis mettent hors de portée l'application de l'algorithme DMD. Nous présentons une nouvelle approche efficace pour l'extraction des structures spatiales et temporelles DMD dans le cas de grosses bases de données.

Décomposition en Mode Dynamique

On considère l'opérateur A défini tel que: $A \circ \Pi = \Pi \circ \phi_{\Delta t}$, avec Π l'application de l'espace des phases vers l'espace des observables de dimension n , et $\phi_{\Delta t}$ le flot dynamique. Alors:

$$A(\mathbf{u}(t_0 + n\Delta t)) = \mathbf{u}(t_0 + (n+1)\Delta t) \quad (1)$$



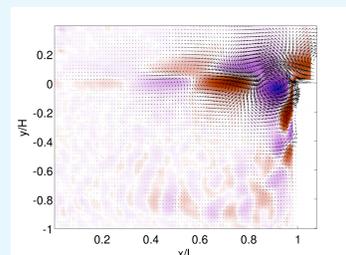
A est donc un opérateur d'évolution sur l'état \mathbf{u} et amenant un échantillon sur le suivant. En notant le jeu de données $K_i^j = \{\mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_j\}$, on a:

$$AK_1^N = K_2^{N+1}$$

Les vecteurs propres de A sont des structures spatiales cohérentes, pertinentes pour la dynamique du système.

La Décomposition en modes dynamiques

- ↪ Trouver une matrice S similaire de taille réduite à l'opérateur A , extraite du jeu de donnée. Alors S partage ses propriétés spectrales avec A .
- ↪ Pour un couple (λ, ϕ) de valeur et de vecteur propres de S , $(\lambda, U\phi \equiv \Psi)$ sont des valeur et vecteur propres de A .



Methode

- svd de : $K_1^N = U\Sigma V^\dagger$
- similarité : $AU = UU^\dagger K_2^{N+1} V \Sigma^{-1} \equiv US$
- identification des valeurs λ_i et vecteurs ϕ_i de S

Les propriétés spectrales de la DMD se traduisent par:

$$\mathbf{u}_n = \sum_i \langle \mathbf{u}_0, \Psi_i \rangle \lambda_i^n \Psi_i \quad (2)$$

Présentation de la méthode Éco-DMD

L'équation (2) se réécrit[3]:

$$K_1^N = MV + R \approx MV, \quad (3)$$

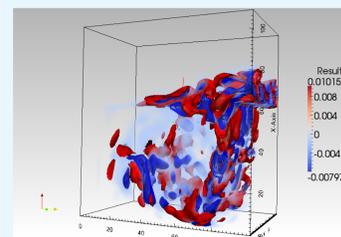
avec R un résidu, $V \in \mathbb{C}^{N \times N}$ une matrice de type Vandermonde.

$$V := \begin{pmatrix} \lambda_1^{t_1} & \lambda_1^{t_2} & \dots & \lambda_1^{t_N} \\ \lambda_2^{t_1} & \lambda_2^{t_2} & \dots & \lambda_2^{t_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_N^{t_1} & \lambda_N^{t_2} & \dots & \lambda_N^{t_N} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} M \in \mathbb{C}^{N \times N} \text{ contient les } \Psi_i. \\ \rightarrow \text{Connaitre } V \Rightarrow M \text{ peut être calculé!} \\ M \approx K_1^N V^\dagger, \end{array}$$

Le problème se réduit à l'identification des valeurs propres λ_i . Pour calculer les valeurs propres, l'algorithme de DMD économique propose de dégrader le jeu de données initial K_1^N .

- Une analyse DMD dessus donnant une approximation de V .
- ↪ Gains de RAM et de temps de calculs proportionnels au taux de dégradation τ .

Résultats et Limitations



Gains:

	DMD	↔	Éco-DMD
RAM:	$\mathcal{O}(nN)$	↔	$\mathcal{O}(\tau \times nN)$
flops:	$\mathcal{O}(n^2N)$	↔	$\mathcal{O}(\tau \times n^2N)$

L'identification d'un mode DMD, issu de données DNS ($\approx 10^6$ points, $\tau \approx 0.01$ soit 10^4 points conservés).

Limitations

- Mauvaises observables \Rightarrow Mauvaise identification des valeurs propres.
- ↪ Conserver des points ayant de bonnes qualité d'observabilité.

Observabilité dynamique

Caractéristiques d'une bonne observable dynamique

- Connexion dynamique à l'ensemble des autres points du champ
↪ Permet de sélectionner un minimum d'observables
- Dynamique propre spatialement localisée
↪ Pour ne pas perdre d'information

La propagation de \mathbf{u} (eq. (1)), en approximant A par la DMD: $A \approx USU^\dagger$, implique pour la i ème composante:

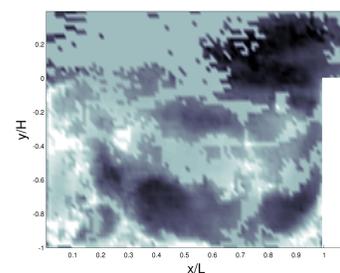
$$u_{n+1}^i = \sum_j a_{ij} u_n^j$$

- Deux relations sur les a_{ij} peuvent alors être reliées aux critères a) et b):
- 1) Nombreuses composantes a_{ij} significatives sur la i ème ligne \Rightarrow prise de l'information dans une grande partie du vecteur d'état
 - 2) Peu de composantes a_{ji} significatives sur la i ème colonne \Rightarrow peu d'influence sur l'évolution des autres composantes

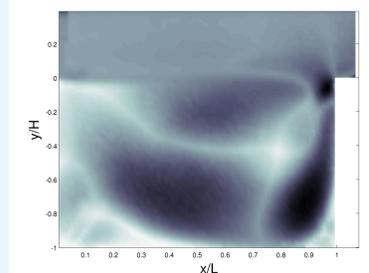
→ Accès à un classement des observables selon l'observabilité dynamique.

Comparaison et résultat

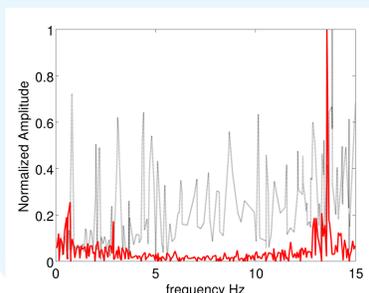
On compare avec une autre méthode d'estimation de l'observabilité (OSVD[4]), ne nécessitant pas les équations du système. La couleur sombre représente les zones ayant de bonnes propriétés d'observabilité.



OSVD



Observabilité dynamique



Le spectre gris est obtenu pour un choix de mauvaises observables, et est inutilisable, le rouge pour un choix de bonnes observables, et correspond bien au spectre sur les données complètes.

References

- [1] P.J. Schmid, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, *J. Fluid Mech.*, **656**, p. 5–28, 2010.
- [2] C. W. ROWLEY, I. MEZIC, S. BAGHERI, P. SCHLATTER & D. S. HENNINGSON, Spectral analysis of nonlinear flows, *Journal of Fluid Mechanics* **641**, pp. 115-127 (2009)
- [3] K. Chen, J.H. Tu & C.W. Rowley, Variants of dynamic mode decomposition: connections between Koopman and Fourier analyses, *Journal of Nonlinear Science*, submitted, 2011.
- [4] L.A. Aguirre1, C. Letellier: Investigating observability properties from data in nonlinear dynamics, *PRE* **83**, (2011)