

Opérateur de Koopman et identification de structures cohérentes : application à un écoulement de cavité

F. Guéniat^{1,3}, J. Basley^{1,3}, Ch. L. Douay^{2,3}, L.R. Pastur^{1,3}, F. Lusseyran³, & Th. M. Faure^{2,3}

¹ Université Paris-Sud 11, F-91405 Orsay Cedex

² Université Pierre & Marie Curie,

³ LIMSI-CNRS BP 133, F-91403 Orsay Cedex

florimond.gueniat@limsi.fr

Résumé. On présente la technique de décomposition en modes dynamiques récemment introduite en mécanique des fluides pour extraire les structures spatiales pertinentes vis-à-vis de la dynamique d'un écoulement. La méthode est illustrée sur un écoulement de cavité.

Abstract. Dynamic mode decomposition (DMD) has been recently introduced in the field of fluid mechanics. It is aimed at extracting spatial structures expected to be relevant with respect to the fluid flow dynamics. DMD is applied to a cavity flow for the sake of illustration.

1 Introduction

Un système physique ouvert possède, potentiellement, un nombre infini de degrés de liberté. Néanmoins, les écoulements sont le plus souvent organisés autour de structures cohérentes qui jouent un rôle décisif dans la dynamique. On peut par exemple penser aux grandes structures tourbillonnaires des allées de von Karman, que l'on observe aussi bien dans des expériences de laboratoire que dans le sillage de structures à grande échelle telles que des navires ou des îles, pour lesquels les nombres de Reynolds sont très grands et la turbulence pleinement développée sur la gamme des échelles inertielles. Ces structures invitent à chercher des moyens de réduction de la dimension effective des écoulements considérés. Une idée classique consiste à rechercher une base vectorielle, constituée de modes, capable de décrire les réalisations \mathbf{u} du champ mesuré. Ce champ exhibe une structure dans l'espace, \mathbf{r} , et évolue dans le temps, t . Dans l'hypothèse de séparation des variables d'espace et de temps, on cherche alors à écrire \mathbf{u} sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i \geq 1} a_i(t) \psi_i(\mathbf{r}), \quad (1)$$

la base des $\{\psi_i\}$ (ou des $\{a_i\}$) étant a priori de dimension infinie, discrète ou continue. Dans l'optique d'une réduction de modèle et, plus généralement, dans les méthodes de type Galerkin, on se restreint à un ensemble fini de modes :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i \in \mathcal{S}} a_i(t) \psi_i(\mathbf{r}),$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ est une approximation du champ \mathbf{u} et \mathcal{S} un ensemble de dimension finie. Lorsque les conditions aux limites sont homogènes, une base naturelle est donnée par les modes de Fourier. Dans des problèmes aux conditions aux limites plus complexes, on peut recourir à des méthodes empiriques de décomposition suivant les axes principaux de l'ensemble des données (modes POD) [4], ou rechercher des champs solutions des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un état de base stationnaire (modes globaux) [5]. Récemment, Schmid [6,9] et Rowley [8] ont proposé une nouvelle méthode de décomposition, basée sur l'hypothèse de l'existence d'un opérateur de Koopman [1], permettant théoriquement d'extraire directement les informations de la dynamique (non-linéaire) de l'écoulement en régime permanent instationnaire.

Dans cette contribution, nous présentons la méthode en détail et l'illustrons sur un écoulement de cavité cisailé.

2 Décomposition en modes dynamiques

2.1 Opérateur d'évolution

On considère un système dynamique évoluant sur une variété Ω de dimension N , X un point de Ω représentant l'état du système, et ϕ_t le flot de Ω dans Ω qui fait passer le système de l'état $X(t_0)$ au temps t_0 à l'état $X(t_0 + t)$ au temps $t_0 + t$:

$$X(t_0 + t) = \phi_t(X(t_0)). \quad (2)$$

On réalise alors une mesure $h(X)$ sur l'état du système, à des intervalles de temps Δt réguliers. La fonction h de Ω dans \mathbb{C} est élément d'un espace de Hilbert \mathcal{H} dont la métrique sera définie par un produit scalaire interne. On introduit alors un opérateur d'évolution, l'opérateur de *Koopman* U_t , agissant dans \mathcal{H} , tel que [1]

$$U_t h(X) = h(\phi_t X). \quad (3)$$

Ainsi, $U_t h$ a en X la valeur que h aura au point $\phi_t X$ vers lequel X aura été transporté après le temps t . L'opérateur U_t , linéaire, décrit l'évolution temporelle d'une observable dont la série,

$$V_0^{N-1} = \{h(t_0), h(t_0 + \Delta t), h(t_0 + 2\Delta t), \dots, h(t_0 + (N-1)\Delta t)\}, \quad (4)$$

est produite par la dynamique (non-linéaire) sous-jacente du flot. On a noté ici $h(t_k) \equiv h(X(t_k))$. De la définition (3) on peut réécrire (4) sous la forme

$$V_0^{N-1} = \{h(t_0), U_{\Delta t} h(t_0), U_{2\Delta t} h(t_0), \dots, U_{(N-1)\Delta t} h(t_0)\}, \quad (5)$$

avec $U_{k\Delta t} = U_{\Delta t}^k$, de sorte que V_0^{N-1} est un sous-espace de Krylov d'ordre N . Dans la suite il sera implicitement fait référence au temps Δt d'échantillonnage des données et nous noterons $U_{\Delta t} \equiv U$ et $X_k = X(t_0 + k\Delta t)$. Supposons l'opérateur U diagonalisable, et que ses vecteurs propres forment une base de \mathcal{H} , et notons ϕ_i un vecteur propre de U associé à la valeur propre λ_i :

$$U \phi_i = \lambda_i \phi_i.$$

La famille des $\{\phi_i\}$ est de dimension infinie et toute mesure $h(t_k)$ de l'état du système peut se décomposer sur cette base :

$$h(X_k) = \sum_{i \geq 1} \alpha_i \phi_i(X_k), \quad (6)$$

où α_i est la projection de h sur la base des $\{\phi_i\}$. Notons que la base n'est pas orthogonale a priori et que la projection est donc non-normale a priori. Les α_i sont les coefficients de Koopman. La généralisation à une observable h non scalaire, par exemple deux composantes du champ de vitesse mesurées dans un plan par des techniques de vélocimétrie par images de particules, est immédiate ; le coefficient α_i , complexe a priori, pourra avoir autant de composantes que h , selon que h sera une mesure scalaire ou celle d'un champ.

2.2 Évolution sur un attracteur

On peut remarquer une importante propriété des fonctions de Koopman :

$$h(X_{k+1}) = U h(X_k) = U \left(\sum_{i \geq 1} \phi_i(X_k) \alpha_i \right) = \sum_{i \geq 1} U \phi_i(X_k) \alpha_i = \sum_{i \geq 1} \lambda_i \phi_i(X_k) \alpha_i.$$

Par récurrence, on obtient donc :

$$h(X_{k+1}) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i^k \phi_i(X_0) \alpha_i. \quad (7)$$

Le résultat remarquable est que, si un opérateur d'évolution tel que U existe, c'est-à-dire si la dynamique (non-linéaire) sous-jacente est déterministe, alors toute valeur prise par h peut se déduire de la connaissance de la projection de la condition initiale $h(X_0)$ sur la base des $\phi_i(X_0)$, et des valeurs propres λ_i . D'autre part, si la dynamique du système évolue sur un attracteur non dégénéré, i.e. l'image de la variété Ω est la variété Ω , alors U est un opérateur unitaire [1], le théorème spectral assurant que les valeurs propres sont sur le cercle unité, ses vecteurs propres ϕ_i étant orthogonaux, et

$$(Uf, Ug) = (f, g).$$

L'opérateur U est alors un automorphisme de la variété, et la décomposition de l'équation (6) est complète.

2.3 Estimation des modes propres de l'opérateur

Il existe diverses manières d'estimer les valeurs et vecteurs propres de l'opérateur U et nous ne présenterons ici que la méthode dite de la matrice compagnon. De plus amples détails peuvent être trouvés dans [9]. Considérons, puisqu'il en sera question plus loin, le cas particulier où la mesure h est celle d'un champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, dans un plan (x, y) , des deux composantes $u_x(x, y, t)$ et $u_y(x, y, t)$, réalisée à intervalles de temps réguliers et suffisamment petits pour que toutes les échelles (temporelles) de la dynamique soient résolues. L'espace de Krylov (4) s'écrit

$$V_0^{N-1} = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}\},$$

les indices correspondants aux différents temps t_0, t_1, \dots, t_{N-1} de la mesure et $\mathbf{u}_k \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r}, t_k)$. L'hypothèse sur laquelle repose la méthode de la matrice compagnon est que les N premières mesures — où $N < M$, M étant la dimension de l'observable — contenues dans V_0^{N-1} , suffisent à décrire n'importe quelle réalisation ultérieure du champ \mathbf{u} , et notamment le N -ème :

$$\mathbf{u}_N = c_0 \mathbf{u}_0 + c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_{N-1} \mathbf{u}_{N-1},$$

c'est-à-dire :

$$\mathbf{u}_N = V_0^{N-1} \mathbf{c}, \quad (8)$$

avec $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})^\dagger$, \dagger représentant l'opérateur de transposition hermitienne. En remarquant par ailleurs, d'après (5), que :

$$UV_0^{N-1} = V_1^N,$$

il résulte de l'hypothèse (8) que l'on peut introduire une matrice C , dite matrice compagnon, telle que :

$$UV_0^{N-1} = V_0^{N-1} C + \mathbf{r}^\dagger \mathbf{e}_N, \quad (9)$$

avec

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$\mathbf{e}_N = (0, 0, \dots, 1)^\dagger \in \mathbb{R}^{N+1}$ et \mathbf{r} un vecteur résidu, orthogonal au sous-espace de Krylov V_0^{N-1} , qui tend vers zéro lorsque la condition (8) est strictement vérifiée.

La matrice C est de dimension $N \times N$. Ses éléments inconnus, les c_j , peuvent être déterminés, d'après l'égalité (8), en minimisant la norme :

$$\mathbf{c}_{opt} = \min_{\mathbf{c}} \left| \mathbf{u}_N - \sum_{j=1}^{N-1} c_j \mathbf{u}_j \right|_2.$$

Il est aisé de calculer les valeurs et vecteurs propres de C ; or ces derniers sont liés à celles et ceux de l'opérateur U , C et U étant similaires. En effet, soit \mathbf{v}_j un vecteur propre de C associé à la valeur propre σ_j , alors :

$$V_0^{N-1}C\mathbf{v}_j = V_0^{N-1}(\sigma_j\mathbf{v}_j) = \sigma_j(V_0^{N-1}\mathbf{v}_j).$$

Or, d'après (9), $V_0^{N-1}C\mathbf{v}_j = UV_0^{N-1}\mathbf{v}_j$ si le résidu est nul, d'où :

$$U(V_0^{N-1}\mathbf{v}_j) = \sigma_j(V_0^{N-1}\mathbf{v}_j),$$

de sorte que $\sigma_j \equiv \lambda_j$ est valeur propre de U associée au vecteur propre $V_0^{N-1}\mathbf{v}_j \equiv \boldsymbol{\alpha}_j$. Il est donc possible de déterminer, empiriquement à partir de l'ensemble V_0^{N-1} , N éléments de la base des $\{\phi_i\}$:

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = \sum_{i=1}^N \lambda_i^{k-1} \phi_i(X_0) \boldsymbol{\alpha}_i. \quad (11)$$

L'ensemble des conditions initiales $\{\phi_i(X_0)\}$ est déterminée en projetant \mathbf{u}_0 sur les $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$. La relation (8) conduit aux mêmes limites qu'en Fourier, à savoir que la plus petite fréquence résolue dans le système est $f_{\min} = 1/T$, où $T = N\Delta t$ est le temps total d'observation imposé par V_0^{N-1} . De la même façon, la plus haute fréquence résolue est $f_{\max} = 1/\Delta t$. Il en résulte aussi que les modes propres ϕ_k de U sont des modes de Fourier $e^{i\omega_k t}$ si la dynamique est périodique [8]. De plus, les dynamiques quasi-périodiques ne sont que partiellement décrites par le système (11), tandis qu'il faudrait faire tendre N vers l'infini pour que la condition (8) soit vérifiée si la dynamique du système évoluait sur un attracteur chaotique. Dans la plupart des cas réels, où la dynamique est chaotique et T est fini, le résidu \mathbf{r} dans (9) n'est pas nul, et $\tilde{\mathbf{u}}_k$ dans (11) n'est qu'une représentation approchée de la réalisation \mathbf{u}_k du champ de vitesse. Remarquons enfin qu'à aucun moment l'état X du système ni l'opérateur d'évolution U ne sont déterminés.

3 Application à un écoulement de cavité

L'écoulement considéré est un écoulement de cavité, décrit dans [11]. Le rapport de forme de la cavité, rapport de sa longueur $L = 100$ mm à sa hauteur H , vaut $L/H = 2$. La vitesse incidente est $U = 1.9$ m/s, correspondant à un nombre de Reynolds, basé sur L , de l'ordre de $Re_L = UL/\nu_{air} = 12700$. La couche cisailée, qui sépare l'intérieur de l'extérieur de la cavité, est instable vis-à-vis de modes de Kelvin-Helmholtz [3]. D'autre part, la présence du coin aval conduit à une sélection des modes d'oscillation de la couche cisailée et il en résulte, dans le régime considéré, l'apparition d'oscillations auto-entretenues, qui se traduisent par un spectre de puissance très piqué autour de quelques fréquences caractéristiques (cf spectre de la figure 1b en trait plein). Dans le régime permanent, les valeurs propres λ_k de l'analyse de Koopman sont sur le cercle unité, comme on peut le voir sur la figure 1a ; on peut donc les écrire sous la forme $\lambda_k = \exp(i\omega_k \Delta t)$ et identifier $f_k = \omega_k/2\pi$ à une fréquence de Fourier (temporelle). On compose ainsi un spectre en affectant, à chaque canal de fréquence $f_k \pm \delta f_k/2$, l'amplitude, au sens de la norme \mathcal{L}^2 , du mode de Koopman $\boldsymbol{\alpha}_k$ qui lui est associé. On obtient le spectre de la figure 1b (trait pointillé), qui tend vers le spectre de Fourier de l'écoulement (en trait plein).

Les structures spatiales $\boldsymbol{\alpha}_k$, associées aux fréquences f_k les plus piquées du spectre, sont présentées sur la figure 2. Comme on s'y attend, les structures associées aux fréquences les plus élevées et énergétiques du spectre, sont associées à des modes de la couche cisailée (figures du haut). Les basses fréquences sont quant à elles associées à des structures intra-cavitaires, comme le révèlent les figures du bas.

4 Discussion et conclusion

La décomposition en mode dynamique, récemment proposée par P. Schmid [6,9], introduit, dans le domaine de la mécanique de fluide, les concepts de l'analyse de Koopman initialement

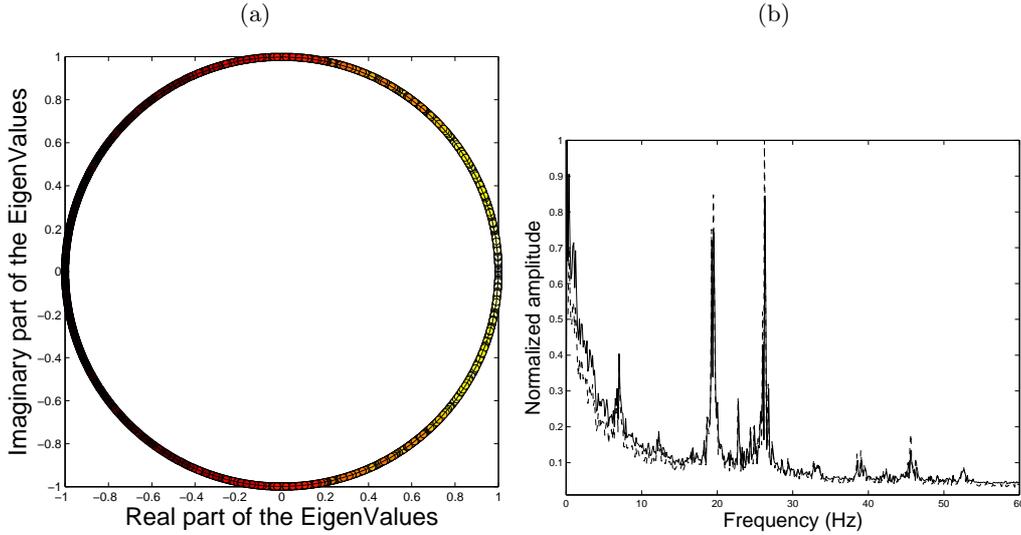


Fig.1. Décomposition en modes dynamiques : (a) valeurs propres de l'opérateur, qui se distribuent sur le cercle unité dans le régime permanent. Les niveaux de gris traduisent l'amplitude, au sens de la norme \mathcal{L}^2 , du mode dynamique associé (blanc pour les plus énergétiques). (b) Comparaison des spectres de puissance obtenus par analyse de Fourier (trait plein) ou par décomposition en modes dynamiques (pointillés). L'analyse de Fourier est faite sur les champs de vitesse, en moyennant les spectres de puissance obtenus en chacun des points de la grille spatiale. Le spectre de Koopman est obtenu en reportant, pour chaque canal fréquentiel, l'amplitude du mode dynamique associé.

développée, dans les années 30, dans le contexte des systèmes dynamiques hamiltoniens [1,8]. Cette analyse se révèle extrêmement prometteuse pour l'identification de structures cohérentes d'un écoulement fluide, pertinentes vis-à-vis de sa dynamique temporelle. Dans le cas d'un régime permanent, lorsque la dynamique du système évolue sur un attracteur, les modes de Koopman tendent (au sens de la limite) vers les structures spatiales associées aux fréquences de Fourier temporelles [8,10].

En mécanique des fluides, il est fréquent de vouloir rechercher une décomposition du type de celle de l'équation (1), notamment pour réduire la complexité de la représentation du champ de vitesse. Les structures spatiales, $\psi_i(\mathbf{r})$, sont souvent obtenues par une décomposition de type Karhunen-Loève, ou décomposition orthogonale propre (acronyme anglo-saxon consacré : POD) [2] : la base (orthogonale) des modes spatiaux est construite, empiriquement, à partir de l'ensemble des mesures V_0^{N-1} , par identification des composantes principales de la matrice V_0^{N-1} [4]. Néanmoins, dans les régimes tels que celui représenté par le spectre de la figure 1b, où deux fréquences caractéristiques de la couche cisailée, $f_1 = 19$ Hz et $f_2 = 26$ Hz, sont en compétition et apparaissent alternativement, au cours du temps, dans les spectres instantanés de puissance, la POD identifie un unique mode moyen, à la fréquence $f_m \simeq (f_1 + f_2)/2$, et une seule structure spatiale associée, $\psi_i(\mathbf{r}) \simeq (\psi_1(\mathbf{r}) + \psi_2(\mathbf{r}))/2$. Identifier les structures spatiales associées à chacune des fréquences f_1 et f_2 suppose, dans ce cas, de réaliser une POD conditionnelle selon qu'un mode ou l'autre d'oscillation est présent dans la couche cisailée [7]. La décomposition en modes dynamiques que nous avons présentée ici parvient quant à elle à identifier les structures spatiales associées à chacune des fréquences importantes du spectre de puissance : on dispose ainsi d'un moyen empirique efficace pour extraire le *squelette* du champ de vitesse, en identifiant les structures caractéristiques autour desquelles s'organise l'écoulement.

Références

1. B.O. KOOPMAN, Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **17**, pp 315-318 (1931)

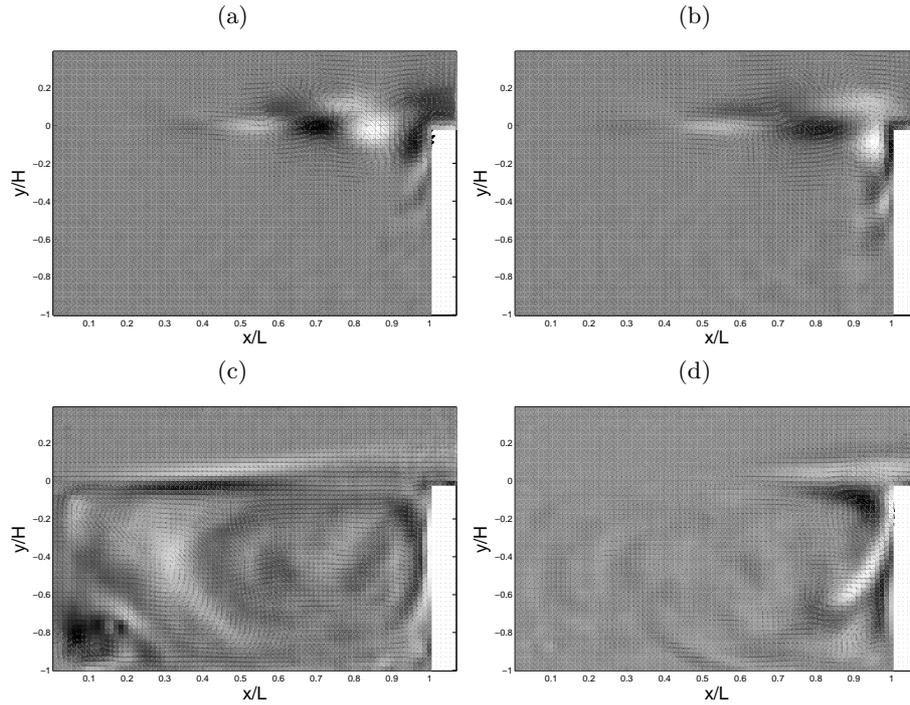


Fig. 2. Modes dynamiques α_k associés aux fréquences (a) $f_k = 19,6$ Hz, (b) $f_k = 26,4$ Hz, correspondant à des structures de la couche cisailée, et (c) $f_k = 0,5$ Hz, (d) $f_k = 7,1$ Hz, associées à des structures intra-cavitaires.

2. G. BERKOOZ, P. HOLMES & J.L. LUMLEY, The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows, *Annual Review of Fluid Mechanics* **25** pp. 539-575 (1993)
3. P. HUERRE & M. ROSSI, Hydrodynamic instabilities in open flows, in *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*, pp. 81- 294, Editors Godreche C. , Manneville P. ,Cambridge University press (1998).
4. L. CORDIER & M. BERGMANN, Proper Orthogonal Decomposition : an overview, *Lecture series 2002-04 and 2003-04 on post-processing of experimental and numerical data*, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 46 pages, [http ://www.math.u-bordeaux1.fr/~bergmann/PDF/OuvrageSynthese/vki03-1.pdf](http://www.math.u-bordeaux1.fr/~bergmann/PDF/OuvrageSynthese/vki03-1.pdf)
5. Voir par exemple la thèse HDR de D. SIPP, Dynamique et contrôle des instationnarités en aérodynamique, 2009, et les références incluses.
6. P.J. SCHMID & J. SESTERHENN, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, in *61st annual meeting of the APS division of fluid dynamics*, APS, San Antonio, Texas, USA (2008)
7. R. PETHIEU, L. R. PASTUR, F. LUSSEYRAN & TH. M. FAURE, Caractérisation expérimentale de la compétition non-linéaire de modes de Kelvin-Helmholtz dans un écoulement en cavité, *Compte-rendu des Rencontres du Non-Linéaire*, 2007, pp. 143-148
8. C. W. ROWLEY, I. MEZIC, S. BAGHERI, P. SCHLATTER & D. S. HENNINGSON, Spectral analysis of nonlinear flows, *Journal of Fluid Mechanics* **641**, pp. 115-127 (2009)
9. P.J. SCHMID, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, *Journal of Fluid Mechanics* **656**, pp. 6-28 (2010)
10. J. BASLEY Experimental investigation of global structures, [http ://www.springerlink.com/content/m64283717837p427/fulltext.pdf](http://www.springerlink.com/content/m64283717837p427/fulltext.pdf) in an incompressible cavity flow using time-resolved PIV *Experiments in Fluids* , - (2010)
11. C. DOUAY, F. GUENIAT, T. FAURE, L. PASTUR & F. LUSSEYRAN, *Compte-rendu des Rencontres du Non-Linéaire*, 2011