



UNIVERSITÉ PARIS-SUD
ÉCOLE DOCTORALE MIPEGE
Modélisation et Instrumentation en Physique, Energies, Géosciences et
Environnement

THÈSE

pour obtenir le titre de
Docteur ès Sciences

de l'Université Paris-Sud
par

FLORIMOND GUÉNIAT

Détection de Structures Cohérentes dans des Écoulements Fluides et Interfaces Homme-Machine pour l'Exploration et la Visualisation Interactive de Données Scientifiques.

Directeur :

François LUSSEYRAN LIMS

Encadrants :

Mehdi AMMI LIMS

Luc PASTUR LIMS

Rapporteurs :

Sabine COQUILLART INRIA

Jean-Christophe ROBINET DYNFLUID

Examineurs

Jacques BORÉE ATAC

Marc MASSOT EM2C

Bernd NOACK ENSMA

Caroline NORE LIMS

A tous ceux qui m'entourent.

“ The purpose of computing is insight, not numbers. ”

Richard Hamming, (1962)

Numerical Methods for Scientists and Engineers

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse, Luc, François et Mehdi, pour m'avoir laissé une liberté totale pour les premiers, et sa confiance et son enthousiasme pour le dernier, durant ces trois ans et demi. Merci à Caroline Nore pour m'avoir lancé sur ma carrière académique, sa participation au Jury de soutenance est une belle conclusion de cette aventure.

M. J.C. Robinet et Mm. S. Coquillard ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, et je les en remercie, de même que pour leur participation au Jury ;

M. B. Noack m'a fait l'honneur de participer au Jury de soutenance, je l'en remercie profondément ;

Merci à M. J. Borée d'avoir accepté de présider ce Jury.

Je tiens également à remercier Adrien, Jean, Max, Paul, Yassine, Pierre. Les gars, c'est aussi grâce à vous que je suis là ! Un merci tout particulier à Yoren, pour la patience dont il a fait preuve pour m'aider -le mot est faible- dans la réalisation des diverses expériences. Merci à Vincent, Yoann, Christelle, Jérémy et tous les autres, pour les discussions physiques au café, à l'étranger... Merci également à tous mes amis hors du labo. Votre soutien a été déterminant.

Bien sur, je remercie ma chérie Maud et ma famille, ma maman, JY et mes grands-parents en tête, pour leur soutien absolument indispensable, et leurs encouragements durant ces quelques années.

De nombreuses personnes méritent d'être associées à ces travaux. Je ne vous oublie pas, c'est juste que je n'ai pas assez de place sur cette page !

Résumé

Depuis l'identification par Brown & Roshko, en 1974, de structures jouant un rôle majeur dans le mélange d'un écoulement turbulent, la recherche de structures cohérentes a été un des principaux axes d'étude en mécanique des fluides. Les travaux présentés dans ce manuscrit s'inscrivent dans cette voie.

La première partie du manuscrit traite ainsi de l'identification de structures cohérentes. Elle se compose de trois chapitres abordant deux techniques d'identification. La Décomposition en mode dynamique (DMD), ainsi que des variantes généralisant son champ applicatif est présenté dans le premier chapitre. Cette méthode propose une représentation par modes spatiaux et temporels d'un ensemble de données. Une méthode pour la sélection de composantes particulièrement représentatives de la dynamique, i.e. présentant de bonnes qualités d'observabilité, se basant sur cette décomposition est également décrite dans ce chapitre. Le deuxième chapitre traite de la détection de structures cohérentes lagrangienne, par suivi de particules. Ces structures permettent d'identifier les frontières matérielles et apportent des éclaircissements sur les mécanismes du mélange au sein de l'écoulement considéré. Ces méthodes sont appliquées, dans le chapitre trois, au cas d'un écoulement incompressible affleurant une cavité ouverte.

La seconde partie du manuscrit traite des questions de représentation et discrimination de données scientifiques. Une réponse à la question de la représentation de structures cohérentes a été la mise en place d'outils permettant la visualisation interactive de jeux de données scientifiques, qui dont la présentation fait l'objet du chapitre quatre. En particulier, l'utilisation d'objets tangibles, représentant les données dans le monde réel, permet une exploration plus efficace des ensembles de volumétries de données scientifiques. La question d'une perception et discrimination efficace de données représentées, e.g. la différenciation entre deux valeurs proches, est abordée dans le cinquième chapitre.

Brown & Roshko identify the key role, as soon as 1974, of coherent structures in the mixing of a turbulent jet. Since, the seek for coherent structures has been a major field in fluid mechanics. This manuscript follows this path, and aims at describing algorithm to compute and explore coherent structures from fluid mechanics dataset.

The first part of this manuscript is dedicated to present algorithms for the computations of coherent structures from dataset. The first chapter exposes the Dynamical Modes Decomposition, and presents improvements of the method. A criterion to estimate the observability properties of components of the state vector is also presented. The second chapter aims at describing an efficient algorithm to compute Lagrangian Coherent Structures, which are somewhat equivalent to material frontiers in fluid flows, and highlight mixing dynamics. This methods are applied, in a third chapter, to characterize the dynamics of an open cavity flow.

The second parti of this manuscript is dedicated to the representation and discrimination of scientific dataset. The fourth chapter presents metaphors for the interactive exploration of scientific and volumetric dataset. The use of tangible interfaces is investigated. The last chapter deals with the differentiation between represented data, by proposing an algorithm for the differentiation between close but different signals.

Table des matières

| | |
|---|----------|
| Introduction | 1 |
| I Identification de Structures Cohérentes | 5 |
| 1 Décompositions modales | 7 |
| 1.1 État de l'art des décompositions modales en mécanique des fluides | 7 |
| 1.1.1 La Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres | 8 |
| 1.1.2 Analyse de stabilité linéaire | 10 |
| 1.1.3 Décomposition globale de Fourier | 11 |
| 1.2 Décomposition en modes dynamiques | 12 |
| 1.2.1 Opérateur d'évolution | 12 |
| 1.2.2 Opérateur similaire | 13 |
| 1.2.2.1 Méthode par matrice compagnon | 14 |
| 1.2.2.2 Méthode par matrice d'Hessenberg | 15 |
| 1.2.2.3 Par décomposition en valeurs singulières | 18 |
| 1.2.3 Modes dynamiques | 19 |
| 1.3 Propriétés des modes DMD | 19 |
| 1.3.1 Propriétés spectrales | 19 |
| 1.3.2 Héritage des propriétés spatiales | 21 |
| 1.4 Variantes de la DMD | 22 |
| 1.4.1 Bases de données singulières | 22 |
| 1.4.2 DMD Non-Uniforme | 23 |
| 1.4.2.1 Réécriture de la Décomposition en Modes Dynamiques | 23 |
| 1.4.2.2 Minimisation du résidu | 24 |
| 1.4.3 Éco-DMD | 24 |
| 1.4.3.1 Identification de la matrice de Vandermonde | 25 |
| 1.4.3.2 Algorithme de l'éco-DMD | 25 |
| 1.4.3.3 Coûts calculatoires | 27 |
| 1.4.4 Une décomposition spectrale et énergétique | 27 |
| 1.4.4.1 Présentation | 27 |
| 1.4.4.2 Liens avec les autres décompositions modales | 28 |
| 1.4.4.3 Discussion sur l'énergie associée aux modes chronos-DMD | 29 |
| 1.5 Note sur la sélection d'observables | 31 |
| 1.5.1 Définition de l'Observabilité | 31 |
| 1.5.2 Propagation d'un champ | 32 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1.5.3 | Définition de la DMD-Observabilité | 32 |
| 1.5.4 | Note sur la Contrôlabilité | 33 |
| 1.6 | Comparaison et qualifications des méthodes | 33 |
| 1.6.1 | Comparaisons des méthodes Compagnon/Hessenberg/SVD | 33 |
| 1.6.2 | Qualification de la DMD Non-Uniforme | 36 |
| 1.6.3 | Qualification de l'éco-DMD | 37 |
| 1.6.3.1 | Complexité algorithmique | 38 |
| 1.6.3.2 | Précision de l'identification fréquentielle | 39 |
| 1.6.4 | Qualification de la DMD-Observabilité | 39 |
| 2 | Structures Cohérentes Lagrangiennes | 42 |
| 2.1 | Un point de vue lagrangien | 42 |
| 2.2 | Le mélange lagrangien | 43 |
| 2.2.1 | Dynamiques des lobes | 43 |
| 2.2.2 | Ensembles quasi-invariants | 45 |
| 2.3 | Structures Cohérentes Lagrangiennes | 47 |
| 2.3.1 | Champ d'Exposants de Lyapunov à Temps Fini | 47 |
| 2.3.2 | Définition et propriétés des Structures Cohérentes Lagrangiennes | 49 |
| 2.4 | Algorithme | 50 |
| 2.4.1 | Précision de l'algorithme | 50 |
| 2.4.2 | Parallélisme induit par une implémentation Single Instruction Multiple Data | 50 |
| 2.4.3 | Vectorisation | 51 |
| 2.4.4 | Éviter les calculs redondants | 51 |
| 2.4.5 | Calculs de flots dynamiques élémentaires | 52 |
| 2.4.6 | Déformation conforme du jeu de données | 57 |
| 2.4.7 | Une définition précise de l'exposant de Lyapunov | 58 |
| 2.5 | Validations numériques | 59 |
| 2.5.1 | Présentation du double gyre | 59 |
| 2.5.2 | Analyse des erreurs | 60 |
| 2.5.2.1 | Erreurs théoriques | 60 |
| 2.5.2.2 | Erreurs sur les trajectoires | 61 |
| 2.5.2.3 | Erreurs sur le champ de FTLE | 63 |
| 2.5.2.4 | Conclusions sur les erreurs induites par la méthode | 65 |
| 2.5.3 | Qualification des Déformations Conformes | 66 |
| 2.5.4 | Accélération | 66 |
| 3 | Applications à un écoulement de cavité | 68 |
| 3.1 | Une introduction aux propriétés de l'écoulement de cavité | 69 |
| 3.2 | Configurations étudiées | 72 |
| 3.2.1 | Données expérimentales | 72 |
| 3.2.1.1 | Présentation du dispositif expérimental | 72 |
| 3.2.1.2 | Cas sans intermittence | 73 |
| 3.2.1.3 | Cas avec intermittence | 73 |
| 3.2.2 | Données numériques | 74 |
| 3.3 | Qualification de la DMD Non-Uniforme | 75 |

| | | |
|--|---|------------|
| 3.4 | Qualification de l'éco-DMD | 77 |
| 3.4.1 | Identification modale | 77 |
| 3.5 | Qualification de l'observabilité sur un écoulement | 79 |
| 3.5.1 | Comparaison avec une autre méthode empirique | 80 |
| 3.5.2 | Estimation économique de la DMD-Observabilité | 82 |
| 3.6 | Décompositions modales de l'écoulement de cavité | 82 |
| 3.6.1 | POD sur le jeu de données | 83 |
| 3.6.2 | Analyse DMD | 89 |
| 3.6.3 | Organisation 3D de l'écoulement | 93 |
| 3.6.4 | Validation sur des données DNS 3D | 98 |
| 3.7 | Structures cohérentes lagrangiennes de l'écoulement de cavité | 103 |
| 3.7.1 | Analyse des structures lagrangiennes issues de mesures expérimentales 2D | 103 |
| 3.7.2 | Extraction des propriétés lagrangiennes principales par réduction de modèle | 109 |
| 3.7.3 | Structures lagrangiennes de données DNS 3D | 111 |
| II Visualisation, Interaction et Discrimination | | 119 |
| 4 Visualisation et Interaction | | 121 |
| 4.1 | État de l'art pour l'exploration et la visualisation de données complexes | 122 |
| 4.1.1 | Interaction tactile | 122 |
| 4.1.2 | Réalité Mixte par Interaction 3D | 123 |
| 4.1.3 | Réalité Mixte par Interaction Tangible | 124 |
| 4.2 | Navigation et visualisation des données | 126 |
| 4.3 | Une Interface Tactile pour l'exploration et la visualisation de données scientifiques | 127 |
| 4.3.1 | Présentation de l'interface | 128 |
| 4.3.2 | Évaluation qualitative de l'interface | 132 |
| 4.3.2.1 | Propositions d'interaction | 133 |
| 4.3.2.2 | Implications pour l'exploration scientifique | 133 |
| 4.4 | Interaction à base d'objets tangibles | 134 |
| 4.4.1 | Une fenêtre vers des données scientifique en réalité virtuelle | 135 |
| 4.4.1.1 | Protocole et conditions de l'expérience | 136 |
| 4.4.1.2 | Résultats | 139 |
| 4.4.2 | Outils tangibles pour l'exploration | 142 |
| 4.4.2.1 | Présentation des objets tangibles | 143 |
| 4.4.2.2 | Implémentation | 144 |
| 4.4.2.3 | Modalité de visualisation | 144 |
| 4.4.2.4 | Evaluation du positionnement 3D | 145 |
| 4.4.2.4.1 | Protocole et conditions de l'expérience | 145 |
| 4.4.2.4.2 | Résultats | 148 |
| 4.4.2.5 | Évaluation de l'utilisation de tangibles pour réaliser des plans de coupe | 149 |
| 4.4.2.5.1 | Protocole et conditions de l'expérience | 149 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 4.4.2.5.2 | Résultats | 151 |
| 5 | Discrimination de valeurs | 154 |
| 5.1 | État de l'art pour la différentiation de valeurs proches | 154 |
| 5.1.1 | Les méthodes classiques d'identification de seuil perceptif | 155 |
| 5.1.2 | Les méthodes adaptatives d'identification de seuil perceptif | 156 |
| 5.1.3 | Mesure de l'efficacité d'une méthode d'identification de seuil | 157 |
| 5.2 | Seuil différentiel multi-dimensionnel | 157 |
| 5.2.1 | Détermination efficace de seuils multi-dimensionnels | 158 |
| 5.2.1.1 | Algorithme principal | 159 |
| 5.2.1.2 | Prédiction-Correction des réponses | 160 |
| 5.2.2 | Validation numérique | 161 |
| 5.2.2.1 | Méthode numérique | 161 |
| 5.2.2.2 | Seuil différentiel | 161 |
| 5.2.2.3 | Prédiction-Correction | 164 |
| 5.3 | Validation expérimentale de l'algorithme | 166 |
| 5.3.1 | Protocoles et conditions de l'expérience | 167 |
| 5.3.2 | Résultats | 169 |
| | Conclusion | 172 |
| | Références | 174 |

Table des figures

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Action de l'opérateur d'évolution A | 14 |
| 1.2 | Conséquences d'un mauvais échantillonnage | 21 |
| 1.3 | Algorithme de l'éco-DMD | 26 |
| 1.4 | Liens entre POD, DMD et Chronos-DMD | 30 |
| 1.5 | Représentation du champ synthétique | 34 |
| 1.6 | Erreurs sur l'identification de la fréquence | 35 |
| 1.7 | Erreurs moyenne sur l'identification de la fréquence | 35 |
| 1.8 | Identification de la fréquence par NU-DMD | 37 |
| 1.9 | Occupation en RAM et temps de calculs | 38 |
| 1.10 | Identification des fréquences par éco-DMD | 39 |
| | | |
| 2.1 | Comparaisons entre sections de Poincaré numérique et expérimentale | 43 |
| 2.2 | Trajectoires contraintes par des variétés | 44 |
| 2.3 | Points homoclines | 44 |
| 2.4 | Transports par des lobes | 45 |
| 2.5 | Ensemble invariant du système de Lorenz | 46 |
| 2.6 | Évolution et déformation d'une particule par le flot | 48 |
| 2.7 | Algorithme de calcul du champ de FTLE | 54 |
| 2.8 | Position d'une particule dans le maillage | 55 |
| 2.9 | Influence de la coalescence en mémoire | 55 |
| 2.10 | Maillage non-cartésien et transformation conforme | 57 |
| 2.11 | Minimum/maximum du champ de FTLE | 58 |
| 2.12 | Double-gyre | 59 |
| 2.13 | Erreurs en fonction du temps | 62 |
| 2.14 | Erreurs et Variétés | 63 |
| 2.15 | Disparités entre les champs de FTLE | 63 |
| 2.16 | Orientation des erreurs | 64 |
| 2.17 | Histogramme des déplacements | 65 |
| 2.18 | Déformations conformes et Trajectoires | 66 |
| | | |
| 3.1 | Écoulement de cavité | 68 |
| 3.2 | Schéma de la dynamique | 69 |
| 3.3 | Accrochage des fréquences | 70 |
| 3.5 | DNS et visualisation par fumée | 71 |
| 3.4 | Spectrogramme de l'écoulement | 71 |
| 3.6 | Schéma du dispositif expérimental | 72 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.7 | Dimension de la section d'essai | 73 |
| 3.8 | Spectre LDV pour une géométrie $R = 1.5$ | 73 |
| 3.9 | Spectre LDV pour une géométrie $R = 2$ | 74 |
| 3.10 | Spectre pour une géométrie $R = 2$ | 75 |
| 3.11 | Comparaisons de modes identifiés par NU-DMD et DMD | 76 |
| 3.12 | Surface de réponse | 77 |
| 3.13 | Spectres de l'analyse DMD en fonction de la dégradation spatiale | 78 |
| 3.14 | Identification de fréquences en fonction de la dégradation spatiale | 78 |
| 3.15 | Modes identifiés par éco-DMD | 79 |
| 3.16 | Erreur sur l'identification d'un mode en fonction de la fréquence | 80 |
| 3.17 | Comparaison entre la DMDO et la SVDO | 81 |
| 3.18 | Connexité spatiale d'observables | 81 |
| 3.19 | Spectres en fonction de la DMDO | 82 |
| 3.20 | Spectres des valeurs singulières | 83 |
| 3.21 | Modes POD un à cinq | 84 |
| 3.22 | Spectrogramme du chronos deux | 85 |
| 3.23 | Détermination de la longueur d'onde du train de tourbillons | 86 |
| 3.24 | Modes POD huit à douze | 87 |
| 3.25 | Amplitudes des chronos et événements singuliers | 88 |
| 3.26 | Spectrogramme et amplitude des chronos | 89 |
| 3.27 | Spectre DMD | 90 |
| 3.28 | Modes dynamiques de couche cisailée | 91 |
| 3.29 | Comparaison des modes DMD et POD | 92 |
| 3.30 | Comparaison des spectres POD et de Fourier | 92 |
| 3.31 | Modes dynamiques associés à de petits nombre de Strouhal | 94 |
| 3.32 | Spectrogramme DMD | 95 |
| 3.33 | Zones utilisées pour considérer la divergence | 95 |
| 3.34 | Divergence des modes dynamiques de couche cisailée | 97 |
| 3.35 | Divergence des modes dynamiques à petit nombre de Strouhal | 97 |
| 3.37 | Spectre de l'écoulement 3D | 98 |
| 3.36 | Comparaison de la divergence des modes à fréquence nulle | 98 |
| 3.38 | Mode dynamique de couche cisailée | 99 |
| 3.39 | Mode dynamique de couche cisailée 2D | 99 |
| 3.40 | Mode dynamique associé à nombre de Strouhal $St_L = 2St_D = 0.21$ | 100 |
| 3.41 | Mode dynamique associé à nombre de Strouhal $St_L = 2St_D = 0.21$ 2D | 101 |
| 3.42 | Mode dynamique associé à nombre de Strouhal $St_L = 2St_D = 0.045$ | 101 |
| 3.43 | Mode dynamique associé à nombre de Strouhal $St_L = 2St_D = 0.045$ 2D | 102 |
| 3.44 | Champs de FTLE pour un cycle d'impact tourbillonnaire | 104 |
| 3.45 | Vorticité pour un cycle d'impact tourbillonnaire | 104 |
| 3.46 | Critère Q pour un cycle d'impact tourbillonnaire | 105 |
| 3.47 | Visualisation de fumée | 106 |
| 3.48 | Représentation du flot dynamique | 107 |
| 3.49 | Trajectoires de particules | 107 |
| 3.50 | Trajectoires de particules | 108 |
| 3.51 | Trajectoires de particules | 109 |
| 3.52 | Modèle réduit de l'écoulement de cavité | 110 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.53 | Comparaison entre le modèle réduit et l'écoulement | 111 |
| 3.54 | Retournement des structures intra-cavitaires : vue de face | 113 |
| 3.55 | Retournement des structures intra-cavitaires : vue arrière | 114 |
| 3.56 | Retournement des structures intra-cavitaires : vue de dessous | 115 |
| 3.57 | Feuilletage des structures | 116 |
| 3.58 | Critère Q et FTLE | 116 |
| 3.59 | FTLE au centre de la cavité | 116 |
| 3.60 | Écoulement transverse | 117 |
| | | |
| 4.1 | Split it, Peel it! | 123 |
| 4.2 | CAVE pour la visualisation scientifique | 124 |
| 4.3 | CubicMouse | 125 |
| 4.4 | Interaction colocalisée | 126 |
| 4.5 | Repérage de la tablette | 126 |
| 4.6 | Cadre Fi3D | 128 |
| 4.7 | Interface du logiciel | 129 |
| 4.8 | Manipulation tactile de plan de coupe | 130 |
| 4.9 | Manipulation bi-manuelle du plan d'effacement | 130 |
| 4.10 | Ensemencement par manipulation bi-manuelle | 131 |
| 4.11 | Collaboration colocalisée | 132 |
| 4.12 | Fenêtre vers un environnement virtuel | 136 |
| 4.13 | Vue générale du logiciel | 137 |
| 4.14 | Comparaisons distance parcourue et angle vu | 139 |
| 4.15 | Fraction des participants ayant réalisé la tâche | 140 |
| 4.16 | Comparaisons subjectives des méthodes | 141 |
| 4.17 | Évolution du tangible de référence | 143 |
| 4.18 | Manipulation de plan de coupe | 144 |
| 4.19 | Exemple de la vue augmentée | 145 |
| 4.20 | Modalités en réalité augmentée | 145 |
| 4.21 | Souris 3D | 146 |
| 4.22 | Vue typique de l'expérience en réalité augmentée | 147 |
| 4.23 | Temps de complétion en fonction de la condition | 148 |
| 4.24 | Données IRM | 150 |
| 4.25 | Plan de coupe | 150 |
| 4.26 | Temps de complétion en fonction des conditions | 152 |
| 4.27 | Préférences des utilisateurs en fonction des conditions | 152 |
| | | |
| 5.1 | Courbe psychométrique de Treutwein | 155 |
| 5.2 | Test PEST | 157 |
| 5.3 | Courbe de seuil et dichotomie | 159 |
| 5.4 | Convergence décalée. | 160 |
| 5.5 | Distance entre les courbes, en fonction de la sensibilité | 162 |
| 5.6 | Distance des points à la courbe de seuil | 162 |
| 5.7 | Écart-type des paramètres | 163 |
| 5.8 | Corrélation entre les paramètres | 163 |
| 5.9 | Erreurs sur les paramètres | 164 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.10 | Distance entre les courbes, en fonction de la discrétisation | 164 |
| 5.11 | Amélioration de l'identification au sens de la distance | 165 |
| 5.12 | Amélioration de l'identification des paramètres | 166 |
| 5.13 | Exemple de l'identification de courbes | 166 |
| 5.14 | Stimulus kinesthésiques | 167 |
| 5.15 | Dispositif expérimental | 168 |
| 5.16 | Stimulus kinesthésiques | 169 |
| 5.17 | Courbes de seuils individuelles | 170 |
| 5.18 | Écarts à la courbe maitresse | 171 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|---|-----|
| 1.1 | Identification de fréquences en fonction du bruit, par NU-DMD | 37 |
| 1.2 | Qualification de la DMDO sur des systèmes dynamiques | 41 |
| 2.1 | Déplacements par rapport à la structure de référence | 65 |
| 2.2 | Facteurs de gain résultants des implémentations | 67 |
| 2.3 | Temps résultants des implémentations | 67 |
| 3.1 | Identification de fréquences par NU-DMD | 75 |
| 3.2 | Identification des longueurs d'ondes par NU-DMD | 76 |
| 3.3 | Comparaison des modes DMD et POD | 90 |
| 3.4 | Amplitude de la divergence, suivant les zones considérées | 96 |
| 3.5 | Comparaison des modes DMD et POD | 100 |
| 4.1 | Modalité de déplacement | 141 |
| 5.1 | Efficacité | 165 |

Nomenclature

| | |
|--------------------|---|
| \mathcal{D} | espace des phases. |
| $n_{\mathcal{D}}$ | dimension de l'espace des phases. |
| \mathbf{x} | vecteur d'état. |
| Ω | espace des observables. |
| n_p | dimension de l'espace des observables. |
| \mathbf{u} | champ de vitesse ou observable. |
| $\tilde{\Omega}$ | espace des observables dégradées. |
| \tilde{n}_p | dimension de l'espace des observables dégradées. |
| K | ensemble de réalisations d'observables |
| N | nombre de réalisations d'observables |
| N_{md} | nombre de modes |
| \mathbf{f} | fonction dynamique du système. |
| ϕ | flot du système dynamique. |
| A | opérateur d'évolution. |
| Ψ | fonction courant. |
| ψ | mode spatial POD (<i>topos</i>). |
| α | mode temporel POD (<i>chronos</i>). |
| Φ | mode spatial DMD. |
| Φ^{cd} | mode spatial chronos-DMD. |
| M^\dagger | transposée de M . |
| M^\ddagger | adjoint de M . |
| \star | multiplication terme à terme. |
| σ_α | valeur de DMD observabilité |
| \mathcal{Q} | critère Q. |
| L | longueur caractéristique de la géométrie de l'écoulement. |
| ϕ | flot du système dynamique. |
| A | opérateur d'évolution. |
| Ψ | fonction courant. |
| POD | décomposition orthogonale aux valeurs propres |
| DMD | décomposition en modes dynamiques |
| NU-DMD | décomposition en modes dynamiques Non-Uniforme |
| éco-DMD | décomposition en modes dynamiques économique |
| DMD-O | décomposition en modes dynamiques Observabilité |
| FTLE | Exposants de Lyapunov à Temps Fini |
| \mathbf{f} | fonction psychométrique |
| \mathbf{p} | seuil psychophysique |
| ζ | paramètres du stimulus |

Introduction

La mécanique des fluides est un domaine pourvoyeur de données de grandes dimensions. L'amélioration des techniques expérimentales et numériques conduit à des mesures de champs de vitesse résolues en temps et en espace. Les techniques de post-traitement (voir, *e.g.* [80, 155, 11]) se sont parallèlement considérablement développées, afin d'extraire des structures récurrentes et importantes ou des comportements permettant l'interprétation, l'analyse voire la modélisation des phénomènes physiques. Il est en effet maintenant admis que des structures, aux différentes échelles, participent à l'organisation de l'écoulement [82, 145], même pour les grands nombres de Reynolds [17]. Les allées de Von Karmàn, dans le sillage d'îles, ou les structures auto-similaires dans les couches de mélange en sont des exemples bien connus. Les structures, aux petites échelles, sont également déterminantes pour la compréhension des mécanismes en jeu. L'identification, puis le suivi des bandes de vorticité ou des tourbillons en forme d'épingles à cheveux dans des données hautement résolues de turbulence a ainsi permis de modéliser certains mécanismes d'entretien et de régénération de la turbulence. De telles structures sont également énergétiquement importantes. Par exemple, un cinquième de l'énergie d'une couche de mélange est concentré dans ces structures, et près du dixième dans le cas des couches limites [80]. Outre leur influence sur la dynamique, ces structures peuvent également jouer un rôle important dans les mécanismes de mélange [148, 120], ou encore contribuer au bruit acoustique rayonné.

Un intérêt grandissant s'est donc développé dans la communauté afin de détecter et caractériser ces structures, voir même, le cas échéant, les contrôler. Néanmoins, aucune définition de "structure cohérente" n'est suffisamment générale pour englober la diversité des organisations spatio-temporelles observées. Des critères eulériens existent de longue date, tels que les critères Q [157], ou λ_2 [89], mais demandent de seuilner arbitrairement un champ scalaire. La mise en place de critères statistiques (autocorrélation, corrélation spatiotemporelle), et, plus récemment, la décomposition orthogonale aux valeurs propres [80], permettent de lier des structures spatiales à des propriétés temporelles, mais en interpréter physiquement les résultats est parfois délicat (*e.g.* les structures spatiales étant, par construction, orthogonales). Des décompositions fréquentielles et spatiales de type Fourier ou ondelettes permettent également une meilleure représentation et compréhension des phénomènes physiques, mais perdent de leur intérêt dans les configurations où la turbulence est pleinement développée, et ne peuvent séparer des phénomènes se produisant statistiquement à une même fréquence.

Chassaing [25], néanmoins, a proposé trois critères pour définir une structure tourbillonnaire cohérente. Le premier est de confiner la structure dans une partie restreinte du domaine étudié (notion de structure). Le deuxième critère est que l'intensité tourbil-

lonnaire de la structure soit suffisante pour qu'elle soit discriminable par rapport à son environnement. Enfin, le dernier point est que la structure existe suffisamment longtemps pour que ses propriétés persistent et qu'elle puisse être suivie, si elle est advectée, au cours du temps.

Cette notion de persistance est particulièrement importante. Sans cette cohérence temporelle, une structure pourrait n'être qu'un événement rare ou évanescent au sein de l'écoulement. Cette définition est néanmoins incomplète. Les principaux modes spatiaux POD décrivent les structures *statistiquement* présentes dans l'écoulement. Les modes de Fourier spatiaux permettent d'identifier la structure moyenne d'événements qui se produisent statistiquement régulièrement à une fréquence donnée. Alors que la mécanique des fluides est généralement considéré d'un point de vue eulérien, la question du suivi d'une structure ramène au point de vue lagrangien. Suivre des ensembles permet, également, de considérer le mélange au sein du système. La notion de mélange apporte également une définition complémentaire de structure cohérente. Des poches peuvent être isolées du reste de l'écoulement par des frontières matérielles [120] que le fluide ne peut traverser. Il existe ainsi des barrières [137], généralement indétectables au premier abord, qui sont des ensembles invariants [70] par l'écoulement, et ces ensembles ont une influence déterminante sur les propriétés mélangeantes de l'écoulement. Le célèbre théorème KAM implique que ces poches peuvent survivre au-delà du seuil de la bifurcation vers le régime périodique en temps. Ces ensembles invariants sont bien des structures cohérentes, bien que ne satisfaisant pas le second critère de la définition de Chassaing. La notion de structure cohérente n'est donc pas universelle. Suivant les propriétés du système que le mécanicien cherche à explorer, la structure identifiée sera *a priori* différente.

Avoir identifié les structures cohérentes et pertinentes est une étape importante pour comprendre un écoulement. Néanmoins, un nouveau problème émerge, une fois que l'expert a pu dégager les structures qui l'intéressaient. Comment les interpréter ? Comment comprendre les liens, souvent non-linéaires, entre les divers phénomènes se produisant dans le système ? Pour cela, un outil incontournable reste l'affichage visuel des données [24]. Certaines structures sont particulièrement délicates à identifier numériquement (tels que les crêtes d'un champ scalaire), alors que l'expert les reconnaît immédiatement. Suivre temporellement des ensembles n'est souvent pas une difficulté, pour un utilisateur, tandis que les algorithmes traitant de ces questions, comme les algorithmes de vélocimétrie par image de particules, sont particulièrement lourds, et les appliquer sur une base de données peut parfois demander plusieurs jours. Explorer des ensembles de données atteignant allégrement plusieurs dizaine de giga-octets est une problématique telle qu'un champ propre de recherche, la visualisation scientifique [20, 55, 48], s'est développé autour de ces questions. L'affichage n'est pas toujours suffisant, et Ware [176] a précisé qu'une bonne compréhension s'accompagne d'exploration interactive des données. L'utilisation de plans de coupe pour des données volumiques, afficher conjointement différentes quantités, pouvoir fixer une quantité telle que la valeur associée à une isosurface sont des exemples de fonctionnalités associées à la visualisation scientifique. L'exploration, particulièrement dans le cas de données en trois dimensions et/ou dépendant du temps, permet ainsi une compréhension plus fine des propriétés spatiales, et l'interaction permet de mieux appréhender les relations entre les diverses mesures dont dispose l'utilisateur. D'autre part, la notion de seuillage d'un champ scalaire est parfois arbitraire [98] (*e.g.* le critère \mathcal{Q}), l'exploration reste donc le fait de l'expert. Celui-ci n'est pas à l'abri de ne

pouvoir différencier certaines valeurs, dès lors qu'elles sont trop proches. Les limites de la perception humaine peuvent être atteintes, d'autant plus facilement que la nécessité de transmettre un grand nombre d'informations à l'utilisateur peut surcharger ses canaux sensoriels. Vérifier que les informations extraites par l'expert proviennent de quantités correctement interprétées est rarement fait [147]. Il est par exemple connu que les cartes de couleurs de type arc-en-ciel ("jet colormap") peuvent amener à l'identification de structures non-physiques [112, 14]. Elles restent pourtant majoritairement utilisées dans la communauté.

Ces notions de structures cohérentes dans des écoulements, et ces questions d'interfaces pour la visualisation de données semblent particulièrement éloignées les unes des autres. J'ai pourtant souhaité, dès le départ, travailler sur ces aspects qui sont pour moi complémentaires et qui sont au cœur des deux principaux départements du laboratoire qui m'a accueilli.

Ce manuscrit se compose de deux parties distinctes. La première partie traite de la détection de structures cohérentes dans des données issues de mécanique des fluides. La seconde partie s'attache à développer des outils pour l'exploration, la visualisation et la caractérisation adaptées à de telles données.

Première partie

Identification de Structures
Cohérentes dans des Écoulements.

Chapitre 1

Décomposition d'échantillons sur une base spatiale dynamiquement pertinente

L'hypothèse de séparation des variables, introduite par Joseph Fourier, est une méthode classique d'analyse et de simplification de la représentation de données. Réaliser une décomposition modale est une façon souvent puissante et pertinente d'appréhender les principaux phénomènes physiques. Les approches les plus connues (*e.g.* modes de Fourier, décomposition orthogonale propre, modes globaux) seront rappelées dans la suite. La Décomposition en Modes Dynamiques, proposée depuis quelques années par Rowley *et al.* [152] et Schmid [158, 155] est une puissante méthode de décomposition spectrale, construite afin de représenter les événements statistiquement récurrents et les phénomènes transitoires. La construction de cette base modale, présentée section 1.2, repose sur l'existence d'un opérateur d'évolution, permettant de passer d'une réalisation de l'observable à une autre. Certaines limites contraignent son utilisation. A titre d'exemple, citons un échantillonnage temporel à pas non-constant. La décomposition en modes dynamiques ne peut pas être appliquée à une telle répartition des données. Afin d'étendre la gamme des conditions d'application de cette décomposition, des méthodes dérivées de la DMD sont présentées dans la section 1.4 .

1.1 État de l'art des décompositions modales en mécanique des fluides

L'analyse modale d'un ensemble de données a pour but premier de décrire la dynamique d'un système évoluant dans un espace \mathcal{D} de haute dimension $n_{\mathcal{D}}$, en la projetant sur un sous-espace pertinent, de dimension N_{md} réduite. Ce sous-espace peut-être décrit par une base de modes spatiaux $\{\Phi_i\}$. La description de l'évolution de la grandeur étudiée $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$ se fait alors au par des coefficients de projection $\{\alpha_i\}$ dans la base, qui dépendent de l'état considéré, donc du temps.

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=0}^{N_{\text{md}}} \alpha_i(t) \Phi_i(\mathbf{r}), \quad (1.1)$$

Cette réduction modale permet souvent une description efficace des données mais apporte aussi une meilleure compréhension des phénomènes. En effet, les modes principaux, principaux en un sens qu'il faut préciser pour chaque situation, pourront servir de définition de structures cohérentes associées à la dynamique observée.

1.1.1 La Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres

La décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD), introduite en mécanique des fluides par Lumley & Holmes [11], aussi connue sous le nom de transformée de Karhunen-Loève, ou encore analyse en composantes principales, a été longuement et extensivement décrite dans la littérature. Cette décomposition est construite de manière à identifier les bases temporelle α_i et spatiale ψ_i optimales, de dimension N_{md} , pour la décomposition des données \mathbf{u} évoluant dans un espace \mathcal{D} de dimension $n_{\mathcal{D}}$, tel que $N_{\text{md}} \leq n_{\mathcal{D}}$.

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=0}^{N_{\text{md}}} \alpha_i(t) \psi_i(\mathbf{r}). \quad (1.2)$$

Une propriété intéressante pour la mécanique des fluides, de cette décomposition, est que les modes extraits révèlent des structures pertinentes au sens de la répartition de l'énergie cinétique dans les données.

Le lecteur intéressé pourra se référer, par exemple, au célèbre ouvrage de Holmes *et al.* [80], où à la synthèse proposée par Kerschen *et al.* [95]. Rappelons néanmoins la méthode dite "par snapshots", proposé par Sirovich [164] se basant sur des réalisations d'observables. Le lecteur pourra trouver une description exhaustive dans Cordier *et al.* [30]. Le choix de cette méthode n'est pas anodin. L'algorithme se base sur le tenseur des corrélations temporelles, qui sera *a priori* mieux convergé dans les cas traités dans la suite de ces travaux (champs de données spatialement résolus) que le tenseur des corrélations spatiales au cœur des travaux de Holmes.

Considérons la base de données K_0^N , constituée de $N + 1$ mesures de l'observable $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, par exemple des mesures du champ de vitesse. Supposons que cette base de données ait été échantillonnée régulièrement en temps, avec un pas δt , du temps 0 au temps $T = N\delta t$, et que les mesures soient rangées par ordre croissant en temps¹, *i.e.* :

$$K_0^N = \{\mathbf{u}(\mathbf{r}, 0), \mathbf{u}(\mathbf{r}, \delta t), \dots, \mathbf{u}(\mathbf{r}, (N-1)\delta t), \mathbf{u}(\mathbf{r}, N\delta t)\}. \quad (1.3)$$

Par soucis de clarté de la lecture et par abus de notation, nous noterons à partir de maintenant $i\delta t$ comme t_i . Nous recherchons, par hypothèse, une base orthonormale de modes spatiaux $\{\psi_i\}$, appelée base des *topos*, et une base orthonormale de modes temporels $\{\alpha_i\}$, nommée base des *chronos*, formées de $N_{\text{md}} = N$ modes. Que ces bases soient optimales signifient qu'elles doivent minimiser l'erreur de troncation, au sens des moindres carrés :

1. Ces deux suppositions, superflues dans le cadre de la POD, ne visent qu'à unifier les notations utilisées dans ce rapport.

$$r_m = \sum_{k=0}^{t_N} \left\| \mathbf{u}(\mathbf{r}, t_k) - \sum_{i=0}^m \alpha_i(t_k) \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{r}) \right\|_2, \quad (1.4)$$

ceci pour tout $m \leq N$.

Cette minimisation est un problème aux valeurs propres, qui peut être réécrit :

$$\int_{\mathcal{D}} R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \lambda_i \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{r}) \quad i = 0, \dots, N. \quad (1.5)$$

R est la matrice de corrélation, aussi connue sous le terme de produit tensoriel, définie comme :

$$R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{T} \int_T \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}^\dagger(\mathbf{r}', t) dt, \quad (1.6)$$

où \dagger est l'opérateur de transposition. Soit, pour un système discret :

$$\begin{aligned} R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{N+1} \sum_{l=0}^N \mathbf{u}(\mathbf{r}, t_l) \mathbf{u}^\dagger(\mathbf{r}', t_l) \\ &= \frac{1}{N+1} K_0^N K_0^{N\dagger}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

R est une matrice de dimensions $n_{\mathcal{D}} \times n_{\mathcal{D}}$. La grande taille du problème (1.5) impose de chercher une réécriture de l'observable \mathbf{u} , en pratique sur la base des *topos* $\boldsymbol{\psi}_i$.

Supposons connues les bases des *chronos* et des *topos*. Il est possible de réorganiser l'équation (1.2) pour décrire les *topos* comme une combinaison linéaire des réalisations, en suivant Holmes *et al.* [80]. Multiplier par le *chronos* α_j permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{t_N} \alpha_j(t_k) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t_k) &= \sum_{k=0}^{t_N} \alpha_j(t_k) \sum_{i=0}^m \alpha_i(t_k) \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{k=0}^{t_N} \sum_{i=0}^m \alpha_j(t_k) \alpha_i(t_k) \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^{t_N} \alpha_j(t_k) \alpha_i(t_k) \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Les *chronos* forment une base orthonormale, et donc, en notant $\delta(.,.)$ le symbole de Kroenecker, $\sum_{k=0}^{t_N} \alpha_j(t_k) \alpha_i(t_k) = \delta(i, j)$, la double somme de l'équation précédente (1.8) se réduit à :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{t_N} \alpha_j(t_k) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t_k) &= \sum_{i=0}^m \delta(i, j) \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{r}) \\ &= \boldsymbol{\psi}_j(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (1.9)$$

Tout mode POD peut alors se réécrire comme une combinaison linéaire des réalisations, en notant $a_i^k = \alpha_i(t_k)$:

$$\boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^N a_i^k \mathbf{u}(\mathbf{r}, t_k) \quad i = 0, \dots, N, \quad (1.10)$$

Lorsque l'on injecte la décomposition (1.10) pour réécrire ψ_i dans le problème aux valeurs propres (1.5), on obtient en réarrangeant les termes :

$$\sum_{k=0}^N \left(\sum_{l=0}^N \frac{1}{N+1} \left(\int_{\mathcal{D}} \mathbf{u}(\mathbf{r}', t_l) \mathbf{u}^\dagger(\mathbf{r}', t_k) d\mathbf{r}' a_i^l \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t_k) \right) = \lambda_i \sum_{k=0}^N a_i^k \mathbf{u}(\mathbf{r}, t_k). \quad (1.11)$$

Alors, la famille $\left(a_i^k \right)_{(i,k) \in \{0, \dots, N\}^2}$ est une solution du problème (1.5) dès que l'équation suivante est vérifiée :

$$\sum_{l=0}^N \frac{1}{N+1} \left(\int_{\mathcal{D}} \mathbf{u}(\mathbf{r}', t_l) \mathbf{u}^\dagger(\mathbf{r}', t_k) d\mathbf{r}' a_i^l \right) = \lambda_i a_i^k. \quad (1.12)$$

Cette dernière équation peut être réécrite sous la forme :

$$\tilde{R} \mathbf{a}_i = \lambda \mathbf{a}_i \quad i = 0, \dots, N, \quad (1.13)$$

en posant :

$$\tilde{R} = \frac{1}{N+1} K_0^{N\dagger} K_0^N. \quad (1.14)$$

Ce système est alors de taille réduite. \tilde{R} est de dimension $N_{\text{md}} \times N_{\text{md}}$. Finalement, $\mathbf{a}_i = (\alpha_i(t_k))_{k \in \{0, \dots, N\}}^\dagger = \left(a_i^k \right)_{k \in \{0, \dots, N\}}^\dagger$ est juste la décomposition du i ème *topos* sur la base de données de réalisations, c'est-à-dire le i ème *chronos*. Comme la matrice des corrélations \tilde{R} est une matrice symétrique et semi-définie positive, la famille des *chronos* α_i est une base orthogonale. Une fois les *chronos* identifiés, les modes spatiaux ψ_i découlent de l'équation (1.10). Le lecteur pourra noter que résoudre l'équation (1.13) revient, en pratique, à faire une décomposition en valeur singulière du jeu de données K_0^N .

1.1.2 Analyse de stabilité linéaire

Mamun & Tuckerman [121] et Edwards [38] ont introduit, dans les années 1990, des outils, dérivés de la théorie des systèmes dynamiques, pour évaluer et décrire les instabilités linéaires de solutions stationnaires 2D des équations de Navier-Stokes. En écrivant les équations de Navier-Stokes sous forme compacte :

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad (1.15)$$

et si \mathbf{u}_0 est un point fixe (*i.e.* une solution stationnaire) de \mathbf{f} , alors une perturbation infinitésimale de \mathbf{u}_0 peut être réécrite sous la forme de la solution stationnaire et d'une fluctuation \mathbf{u}' :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'. \quad (1.16)$$

Lorsque cette décomposition est injectée dans l'équation (1.15) :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_0 + \dot{\mathbf{u}}' &= \mathbf{f}(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}') \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) + \nabla f(\mathbf{u}_0) \mathbf{u}' + \mathcal{O}(\|\mathbf{u}'\|_2^2) \end{aligned} \quad (1.17)$$

La solution stationnaire \mathbf{u}_0 étant un point fixe de f , et en restant dans l'approximation linéaire :

$$\dot{\mathbf{u}}' = \mathcal{L}\mathbf{u}' \quad (1.18)$$

où l'on a posé l'opérateur d'évolution linéaire $\mathcal{L} = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)$ comme étant l'opérateur jacobien des équations de Navier-Stokes, linéarisées autour de la solution stationnaire \mathbf{u}_0 . En notant $\mathcal{A}(t) = \exp \mathcal{L}t$, les solutions générales de l'équation (1.18) s'écrivent sous la forme :

$$\mathbf{u}'(t) = \mathcal{A}(t) \mathbf{u}'(0) \quad (1.19)$$

L'opérateur \mathcal{L} et les opérateurs $\mathcal{A}(t)$, $\forall t$ partagent les mêmes espaces propres. Dès lors que ces espaces sont suffisamment riches, la perturbation peut être décrite par les vecteurs propres :

$$\mathbf{u}'(0) = \sum_i a_i \boldsymbol{\psi}_i \quad (1.20)$$

en notant $\boldsymbol{\psi}_i$ la famille des vecteurs propres de \mathcal{L} associés à la famille de valeurs propres λ_i , et a_i les coefficients de projection. Alors, l'équation (1.19) devient :

$$\mathbf{u}'(t) = \sum_i \exp(\lambda_i t) a_i \boldsymbol{\psi}_i \quad (1.21)$$

Le système (1.15) est globalement instable, dès qu'une valeur propre λ possède une partie réelle positive. Pour cette raison, les vecteurs propres $\boldsymbol{\psi}_i$ de \mathcal{L} sont aussi appelés les modes globaux du système (1.15). Cette décomposition modale est par conséquent souvent utilisée pour décrire les instabilités d'un écoulement.

1.1.3 Décomposition globale de Fourier

Une autre technique de décomposition modale est basée sur la transformée discrète de Fourier, réintroduite par Rowley & Colonius [151] et par Basley [6], afin de séparer explicitement les différentes échelles de temps.

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N \exp(\sqrt{-1}\omega_i t) \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{r}). \quad (1.22)$$

Ici, le nombre de modes N_{md} correspond au nombre d'observable N . Chaque mode spatial global de Fourier $\boldsymbol{\psi}_i$ est ainsi associé à une fréquence $f_i = \omega_i/2\pi$. Les modes sont à coefficients complexes. Afin de les calculer, considérons la base de données K_1^N , constituée de N mesures de l'observable $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, par exemple des mesures du champ de vitesse. Supposons que cette base de données ait été échantillonnée régulièrement en temps, avec un pas δt , du temps 0 au temps $T = (N - 1) \delta t$, et que les mesures soient rangées par ordre croissant en temps, ie :

$$K_1^N = \{\mathbf{u}(\mathbf{r}, 0), \dots, \mathbf{u}(\mathbf{r}, (N - 2) \delta t), \mathbf{u}(\mathbf{r}, (N - 1) \delta t)\}. \quad (1.23)$$

On extrait une série temporelle $\{v^k\}$ du jeu de données, correspondant à l'évolution de la k ième composante de \mathbf{u} au cours du temps :

$$\{v^k\} = \{v^k(0), \dots, v^k((N - 2) \delta t), v^k((N - 1) \delta t)\} \quad (1.24)$$

La transformée de Fourier discrète \mathcal{F}^t est le résultat de la projection de cette série temporelle sur la base des fonctions exponentielles complexes :

$$\{\hat{v}^k\} = \mathcal{F}^t \{v^k\}. \quad (1.25)$$

La relation permettant l'identification des coefficients de Fourier discret est :

$$\hat{v}_i^k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N v^k(j\delta t) \exp(-2\sqrt{-1}\omega_i j\delta t), \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (1.26)$$

avec la vitesse angulaire :

$$\omega_i = \frac{2\pi i}{N}, \in [0, 2\pi]. \quad (1.27)$$

Chaque fréquence $f_i = \omega_i/2\pi$ vaut alors :

$$f_i = \frac{i}{2N\delta t} \quad (1.28)$$

Chaque coefficient de Fourier \hat{v}_i^k , pour la composante k , est donc associé à une fréquence f_i . Le mode global de Fourier ψ_i est construit sur les coefficients de Fourier pour une fréquence f_i , pour toutes les composantes k de l'observable.

$$\psi_i \equiv \{\hat{v}_i^1, \dots, \hat{v}_i^{n_D}\} \quad (1.29)$$

Un mode associé à la fréquence f_i correspond donc à l'ensemble des composantes, dans le domaine spectrale, des séries temporelles associées à la fréquence f_i .

1.2 Décomposition en modes dynamiques

La Décomposition en Modes Dynamiques (DMD), proposée dans le cadre de la mécanique des fluides par Rowley *et al.* [152] et Schmid [155] est une méthode de décomposition modale basée sur des *modes dynamiques*². La base spatiale des modes dynamiques est notée $\{\Phi_i\} i \in \{1, \dots, N_{\text{md}}\}$. Les coefficients temporels associés sont des exponentielles complexes.

La DMD est, par construction, particulièrement adaptée pour la représentation d'évènements statistiquement récurrents, ou de phénomènes transitoires. La construction de cette base repose sur l'existence d'un opérateur linéaire de grande taille, permettant de passer d'une réalisation de l'observable à la suivante. La connaissance de cet opérateur n'est néanmoins pas requise par les méthodes présentées par la suite.

1.2.1 Opérateur d'évolution

Soit un système dynamique évoluant sur une variété \mathcal{D} de dimension $n_{\mathcal{D}}$, $\mathbf{X} \in \mathcal{D}$ étant le vecteur d'état du système. Soit encore $\phi_{\Delta t}$ le flot dynamique du système, de \mathcal{D}

2. Dans les travaux précurseurs de Kundu *et al.* [102], le terme *mode dynamique* qualifiait en fait les modes POD.

dans \mathcal{D} , amenant l'état $X(t)$, pris au temps t , à l'état $\mathbf{X}(t + \Delta t)$ au temps $t + \Delta t$. Δt est l'intervalle de temps entre deux mesures. Alors :

$$\mathbf{X}(t + \Delta t) = \phi_{\Delta t}(\mathbf{X}(t)). \quad (1.30)$$

On considère une application Π de l'espace \mathcal{D} sur l'espace des observables Ω . Π peut être interprété comme une mesure du système. L'observable \mathbf{u} est alors définie comme :

$$\mathbf{u}(t) = \Pi(\mathbf{X}(t)). \quad (1.31)$$

Par exemple, \mathbf{u} peut-être le champ de vitesse mesuré dans un plan de l'écoulement. L'opérateur A est construit tel que :

$$A \circ \Pi = \Pi \circ \phi_{\Delta t}, \quad (1.32)$$

où \circ est l'opérateur de composition. Lorsque l'opérateur A est appliqué à une observable :

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}(t_0 + n\Delta t)) &= A \circ \Pi(\mathbf{X}(t_0 + n\Delta t)) \\ &= \Pi \circ \phi_{\Delta t}(\mathbf{X}(t_0 + n\Delta t)) \\ &= \Pi(\mathbf{X}(t_0 + (n+1)\Delta t)) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Il suit :

$$A(\mathbf{u}(t_0 + n\Delta t)) = \mathbf{u}(t_0 + (n+1)\Delta t) \quad (1.34)$$

Cette propriété est déterminante. Elle implique que A est un opérateur d'évolution. A agit sur une réalisation du champ, pour renvoyer la réalisation suivante (*cf.* figure 1.1). Cette propriété provient du lien entre A et l'opérateur de Koopman [100, 124, 152]. En effet, si \mathcal{U} est l'opérateur de Koopman associé à la dynamique $\phi_{\Delta t}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} : \mathcal{F}(\mathcal{D}, \Omega) &\mapsto \mathcal{F}(\mathcal{D}, \Omega) \\ g &\rightarrow \mathcal{U}_g \equiv g \circ \phi_{\Delta t}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

alors l'opérateur d'évolution A dépend de l'opérateur de Koopman par la relation :

$$\mathcal{U}_{\Pi} = \Pi \circ \phi_{\Delta t}. \quad (1.36)$$

ainsi :

$$\mathcal{U}_{\Pi} = A \circ \Pi. \quad (1.37)$$

La section suivante a pour but d'extraire de l'information de A , *ie* de l'information spectrale sur la dynamique. Il s'agit de calculer les valeurs propres de A et les vecteurs propres de A , appelés *modes dynamiques*. Les méthodes proposées par la suite peuvent être considérées comme des dérivées de la méthode d'Arnoldi [3] pour approximer les valeurs propres et vecteurs propres d'un opérateur de grandes dimensions.

1.2.2 Opérateur similaire

L'algorithme DMD repose sur les propriétés des matrices similaires. M_2 est similaire à M_1 , si $\text{rank}\{M_2\} \leq \text{rank}\{M_1\}$, et s'il existe une matrice P telle que :

$$PM_2 = M_1P. \quad (1.38)$$

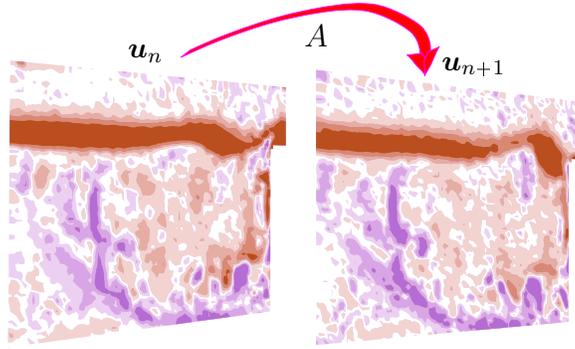


Figure 1.1 – Opérateur d'évolution A agissant sur un échantillon. Dans cet exemple, l'observable est supposée être le champ de vorticité.

Alors, une valeur propre λ de M_2 , ayant pour vecteur propre associé $\boldsymbol{\nu}$, est une valeur propre de M_1 . De plus, le vecteur propre $\boldsymbol{\mu}$ de M_1 associé à λ est facilement calculable à partir de $\boldsymbol{\nu}$ par la relation $\boldsymbol{\mu} = P\boldsymbol{\nu}$:

$$\begin{aligned} PM_2\boldsymbol{\nu} &= P\lambda\boldsymbol{\nu} \\ &= \lambda P\boldsymbol{\nu} \\ &= M_1P\boldsymbol{\nu} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Connaitre une matrice similaire permet donc de calculer une partie des propriétés spectrales sur la matrice de grande dimension M_1 . Dans le cas présent, $M_1 \equiv A$ et l'objectif est d'identifier une matrice similaire $M_2 \equiv S$.

A est *a priori* inconnu. En revanche, on peut disposer d'un ensemble de réalisations K_i^j de l'observable.

$$K_i^j = \{\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_j\}, \quad (1.40)$$

où $\mathbf{u}_n \equiv \mathbf{u}(t_0 + n\Delta t)$. K_i^j est par suite exprimé matriciellement, *i.e.* l'observable est représentée par un vecteur colonne. Par conséquent :

$$\begin{aligned} AK_i^j &= \{A\mathbf{u}_i, \dots, A\mathbf{u}_j\} \\ &= \{\mathbf{u}_{i+1}, \dots, \mathbf{u}_{j+1}\} \\ &= K_{i+1}^{j+1} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Dans la suite, le jeu de données K_1^{N+1} sera utilisé, où $N + 1$ est le nombre de réalisations du champ de données. La relation suivante sera en conséquence au cœur des méthodes présentées :

$$AK_1^N = K_2^{N+1} \quad (1.42)$$

1.2.2.1 Méthode par matrice compagnon

Une première méthode pour construire une matrice similaire est de faire l'hypothèse [152, 158, 155] que la réalisation $N + 1$ est linéairement dépendante des N premières réalisations de l'ensemble K_1^{N+1} . Cette hypothèse prend du sens si l'enregistrement dure

suffisamment longtemps pour couvrir l'essentiel de la dynamique. Dès lors, rajouter des réalisations du champ au jeu de données ne rajoutera pas d'information nouvelle. Alors, l'échantillon \mathbf{u}_{N+1} peut être développé sur les réalisations précédentes :

$$\mathbf{u}_{N+1} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_N \mathbf{u}_N + \boldsymbol{\xi}_{N+1}. \quad (1.43)$$

$\boldsymbol{\xi}_{N+1}$ est un résidu, qui permet de contrôler l'hypothèse faite précédemment. Les c_i peuvent être calculés par minimisation de la norme du résidu :

$$\mathbf{c}_{opt} = \min_{\mathbf{c}} \left| \mathbf{u}_{N+1} - \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{u}_j \right|. \quad (1.44)$$

Cette minimisation de norme peut se faire, lorsque l'on considère la norme \mathcal{L}_2 , par le biais d'une projection oblique sur le dernier échantillon \mathbf{u}_{N+1} de la matrice K_1^N :

$$\mathbf{c}_{opt} = \left(K_1^{N\dagger} K_1^N \right)^{-1} K_1^{N\dagger} \mathbf{u}_{N+1}, \quad (1.45)$$

où \dagger est la transposition hermitienne. Alors, en considérant l'équation (1.42) :

$$K_2^{N+1} = K_1^N S + R. \quad (1.46)$$

R est un résidu matriciel et S est une matrice compagnon. Cette dernière envoie la i ème réalisation sur la réalisation suivante ($i + 1$), à l'exception notable de la dernière, qui est développée selon l'équation (1.43). La sous-diagonale de S est ainsi composée de 1, tandis que sa dernière colonne est composée des c_i :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & c_1 \\ 1 & 0 & & \vdots & c_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & c_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_N \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

Si R est négligé, alors la matrice compagnon est, comme dans l'équation (1.38), similaire à l'opérateur d'évolution A :

$$AK_1^N = K_1^N S \quad (1.48)$$

1.2.2.2 Méthode par matrice d'Hessenberg

Approche directe Cette méthode est dérivée de celle de la matrice compagnon. Comme \mathbf{u}_{N+1} ne dépend en pratique pas linéairement des N premières observations, il existe un résidu $\boldsymbol{\xi}_{N+1}$ (cf. equation (1.43)). La méthode par matrice compagnon, présentée précédemment, utilise la minimisation du résidu résultant de l'équation (1.44). Cette minimisation revient à chercher un résidu orthogonal à l'espace formé par les observables. Cette base n'est *a priori* pas orthogonale, ce qui peut rendre le calcul lors de l'identification des coefficients de l'équation (1.43) mal-conditionné. La méthode suivante consiste à modifier l'espace de Krylov afin d'orthogonaliser la base sur laquelle agit

l'opérateur d'évolution. Le résidu calculé sera donc naturellement orthogonal au nouvel espace, et l'algorithme mieux conditionné. Le lecteur pourra noter que ce résidu doit, en théorie, être identique au résidu calculé par minimisation de la projection oblique (équation (1.45)). Cette projection, par construction, calcule un résidu orthogonal, au sens de la norme \mathcal{L}_2 , à l'espace engendré par les N premières observables. La méthode proposée est donc, en pratique, un préconditionnement de l'algorithme par matrice compagnon.

Le procédé suivant permet de construire une suite orthogonale de vecteurs, appartenant à l'image de A :

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 \quad (1.49)$$

et, pour $2 \leq i \leq N + 1$

$$\begin{cases} V_i = \frac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|} \\ \mathbf{w}_{i+1} = AV_i - \sum_{j=1}^i V_j \langle V_j | AV_i \rangle \end{cases} \quad (1.50)$$

L'opérateur $V_1^N V_1^{N\dagger}$, où $V_1^N = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$, peut s'interpréter comme un projecteur orthogonal sur le sous-espace de Krylov K_1^N . La relation $V_1^{N\dagger} V_1^N = \mathcal{I}_N$ se vérifie par construction de V_1^N . Par conséquent, on a :

$$A \approx V_1^N \underbrace{V_1^{N\dagger} AV_1^N}_H V_1^{N\dagger} = V_1^N H V_1^{N\dagger}. \quad (1.51)$$

Le résidu $\boldsymbol{\xi} = A - V_1^N H V_1^{N\dagger}$ de cette équation sera calculé par la suite. Les coefficients de H découlent de la relation $V_1^{N\dagger} AV_1^N$:

$$H_{i,j} = \langle V_i, AV_j \rangle. \quad (1.52)$$

Par hypothèse³, $A\mathbf{u}_k \in K_1^{k+1}$, et donc, $V_k \in V_1^{k+1}$. Par conséquent, pour $i > j + 1$, $H_{i,j} = 0$. Cette particularité entraîne que H est une matrice d'Hessenberg supérieure. De plus, $H_{k+1,k} = \|\mathbf{w}_{k+1}\|$

$$H = \begin{pmatrix} H_{1,1} & \dots & \dots & \dots & H_{1,N} \\ H_{2,1} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & H_{N,N-1} & H_{N,N} \end{pmatrix}$$

Il est important de contrôler le résidu de l'équation (1.51). Démontrons pour cela la relation suivante :

$$AV_1^N = V_1^N H + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}_{N,N}^\dagger \quad (1.53)$$

avec $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{w}_{N+1}$ et $\mathbf{e}_{i,N}^\dagger = \left(0, \dots, \underbrace{1}_{i\text{ème comp. sur } N}, 0, \dots \right)$.

3. On identifie dans cette notation les matrices et les espaces engendrés par ces matrices

Cette équation matricielle peut s'établir colonne par colonne. Pour $k \leq N$:

$$\begin{aligned}
AV_1^N e_{k,N} &= AV_k \\
&= \mathbf{w}_{k+1} + \sum_{i \leq k} V_i \langle V_i | AV_k \rangle \quad \text{cf (1.50)} \\
&= V_{k+1} H_{k+1,k} + \sum_{i \leq k} V_i H_{ik} \quad \text{cf (1.52)} \\
&= V_1^N H e_{k,N}^\dagger
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Il n'y a donc pas d'erreur sur les N premières colonnes. Pour $k = N + 1$:

$$\begin{aligned}
AV_1^N e_{N,N} &= AV_N \\
&= \mathbf{w}_{N+1} + \sum_{i \leq N} V_i \langle V_i | Av_k \rangle \quad \text{cf (1.50)} \\
&= \mathbf{w}_{N+1} + \sum_{i \leq N} V_i H_{ik} \quad \text{cf (1.52)} \\
&= V_1^N H e_{N,N}^\dagger + w_{N+1}
\end{aligned} \tag{1.55}$$

ce qui établit pour la dernière colonne l'équation matricielle (1.53). La relation (1.53) est donc démontrée.

Méthode "par snapshots" La procédure d'orthonormalisation peut être directement faite sur l'espace de Krylov, et non sur l'espace engendré par chaque itération de l'opérateur d'évolution A . Cette orthonormalisation peut être complétée par le procédé classique de Gram-Schmidt :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, & \text{pour } i = 1 \\ \mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{q}_j \langle \mathbf{q}_j | \mathbf{u}_i \rangle}{\left\| \mathbf{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{q}_j \langle \mathbf{q}_j | \mathbf{u}_i \rangle \right\|}, & \text{pour } 2 \leq i \leq N + 1. \end{cases} \tag{1.56}$$

Q_1^{N+1} est définie comme la matrice générée par les données modifiées $Q_1^{N+1} \equiv \{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{N+1}\}$. Il est aisé, lors de la construction de Q_1^{N+1} , de construire une matrice R_{N+1} , qui correspond à une matrice de passage entre K_1^{N+1} et Q_1^{N+1} :

$$K_1^{N+1} = Q_1^{N+1} R_{N+1}. \tag{1.57}$$

En effet, en développant sur les \mathbf{u}_i l'équation (1.56), on a :

$$\mathbf{u}_i = \left\| \mathbf{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{q}_j \langle \mathbf{q}_j | \mathbf{u}_i \rangle \right\| \left(\mathbf{q}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{q}_j \langle \mathbf{q}_j | \mathbf{u}_i \rangle \right). \tag{1.58}$$

Les indices courants de cette équation étant majorés par i , par construction, R_{N+1} est triangulaire supérieure. En pratique, Q_1^{N+1} et R_1^{N+1} sont issues de la décomposition QR de la matrice de données K_1^{N+1} .

Les réalisations K_2^{N+1} peuvent se décomposer sur Q_1^{N+1} :

$$K_2^{N+1} = Q_1^{N+1} \tilde{R}_{N+1} \tag{1.59}$$

où \tilde{R}_{N+1} est R_{N+1} privée de sa première colonne :

$$\tilde{R}_{N+1} = \begin{pmatrix} R_{1,2} & \dots & \dots & \dots & R_{1,N+1} \\ R_{2,2} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & R_{N,N} & R_{N,N+1} \\ 0 & & \dots & 0 & R_{N+1,N+1} \end{pmatrix}$$

Si l'on développe l'équation (1.59) selon la dernière ligne de \tilde{R}_{N+1} :

$$AK_1^N = Q_1^N R'_N + R_{N+1,N+1} \underbrace{Q_1^{N+1} \mathbf{e}_{N+1,N+1}}_{\text{dernière colonne de } Q_1^{N+1}} \mathbf{e}_{N,N}^\dagger. \quad (1.60)$$

Q_1^N est la matrice des N premiers éléments de Q_1^{N+1} , i.e. $Q_1^N = \{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N\}$. R'_N est \tilde{R}_{N+1} privée de sa dernière ligne, c'est à dire :

$$R'_N = \begin{pmatrix} R_{1,2} & \dots & \dots & \dots & R_{1,N+1} \\ R_{2,2} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & R_{N,N} & R_{N,N+1} \end{pmatrix}$$

Par construction, R'_N est une matrice d'Hessenberg. Rappelons par ailleurs que

$$K_1^N = Q_1^N R_N$$

ce qui donne, avec l'équation (1.60),

$$AQ_1^N R_N = Q_1^N R'_N + R_{N+1,N+1} Q_1^{N+1} \mathbf{e}_{N+1,N+1} \mathbf{e}_{N,N}^\dagger \quad (1.61)$$

En se souvenant que le produit d'une matrice d'Hessenberg par une matrice triangulaire est toujours une matrice d'Hessenberg, l'identification par analogie des termes de l'équation (1.53) donne :

$$\begin{aligned} V_1^N &= Q_1^N \\ H_N &= R'_N R_N^{-1} \\ \mathbf{w} &= R_{N+1,N+1} Q_{N+1} \mathbf{e}_{N+1,N+1} \end{aligned}$$

1.2.2.3 Par décomposition en valeurs singulières

Les algorithmes par matrice compagnon ou d'Hessenberg construisent intrinsèquement des matrices S creuses ou semi-creuses. Elles peuvent être mal conditionnées, par exemple dans le cas de jeu de données bruitées. Schmid [155] a proposé un algorithme alternatif pour obtenir une matrice similaire à l'opérateur d'évolution A . Dans cet algorithme, les réalisations sont projetées non pas sur une base orthogonalisée, comme dans la méthode précédente, mais sur la base POD associée au jeu de données.

La première étape est donc de faire une décomposition en valeurs singulières de la matrice $K_1^N = U\Sigma V^\dagger$. Alors, en utilisant l'équation (1.42) :

$$\begin{aligned} AK_1^N &= AU\Sigma V^\dagger \\ &= K_2^{N+1} \end{aligned} \quad (1.62)$$

La relation $V^\dagger V = \mathcal{I}d$ permet d'écrire :

$$AU = K_2^{N+1}V\Sigma^{-1}, \quad (1.63)$$

et, en utilisant $UU^\dagger = \mathcal{I}d$:

$$AU = UU^\dagger K_2^{N+1}V\Sigma^{-1}. \quad (1.64)$$

En réécrivant $U^\dagger K_2^{N+1}V\Sigma^{-1} \equiv S$:

$$AU = US. \quad (1.65)$$

S est donc, comme dans l'équation (1.38), similaire à A .

Contrairement aux méthodes par matrice compagnon et par matrice d'Hessenberg, la construction de la matrice similaire est, aux erreurs numériques près, exacte. Il n'y a pas de résidu. La stabilité numérique est donc, *de facto*, meilleure. Néanmoins, le résidu des méthodes précédemment introduites peut être considéré comme un contrôle sur l'exactitude de la représentation construite.

1.2.3 Modes dynamiques

Après avoir calculé les valeurs λ_i et vecteurs propres ν_i de la matrice similaire, des approximations λ_i et $\Phi_i = P\nu_i$ des valeurs propres et modes propres de l'opérateur A peuvent être déterminées en utilisant l'équation (1.39), sans qu'aucune connaissance préalable de cet opérateur ne soit nécessaire.

Les modes propres $\{\Phi_i\}$ de A sont appelés modes dynamiques. Ils sont, *a priori*, non-orthogonaux. Si l'espace propre connu de l'opérateur A est de dimension suffisante, ou que les données évoluent sur un sous-espace de dimension suffisamment réduite, alors, toute réalisation du champ peut être décomposée sur l'espace propre de l'opérateur. Ce qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{u}_n = \sum_i a_i^n \Phi_i + \boldsymbol{\xi}, \quad (1.66)$$

avec $\boldsymbol{\xi}$ un vecteur résidu. Les coefficients a_i^n résultent de la projection de l'observable sur l'espace propre de l'opérateur.

1.3 Propriétés des modes DMD

1.3.1 Propriétés spectrales

A est un opérateur d'évolution, ce qui induit une propriété fondamentale de la décomposition en modes dynamiques. Lorsque le résidu $\boldsymbol{\xi}$ est négligé et que l'opérateur A

est ré-appliqué à l'équation (1.66) :

$$\begin{aligned}
 A\mathbf{u}_n &= \mathbf{u}_{n+1} \\
 &= A \sum_i a_i^n \Phi_i \\
 &= \sum_i A a_i^n \Phi_i \\
 &= \sum_i a_i^n \lambda_i \Phi_i.
 \end{aligned} \tag{1.67}$$

Les Φ_i étant des vecteurs propres de A pour les valeurs propres λ_i , et l'opérateur A étant linéaire, l'opérateur somme peut être inversé avec A . Une récurrence jusqu'au premier champ d'observable permet d'obtenir :

$$\mathbf{u}_n = \sum_i a_i^1 \lambda_i^n \Phi_i, \tag{1.68}$$

quelque soit $n \in \mathbb{N}$. La loi de puissance en λ contient toute l'information sur l'évolution temporelle du mode. Les valeurs propres λ sont *a priori* des complexes, ce qui permet la réécriture suivante :

$$\lambda = \rho \exp(\sqrt{-1}\omega\Delta t). \tag{1.69}$$

Fréquence : Chaque valeur propre peut être associée à un canal fréquentiel $f = \frac{\omega}{2\pi}$. *De facto*, chaque mode dynamique est associé à une fréquence. Similairement aux modes de Fourier globaux, chaque mode DMD identifie les structures spatiales statistiquement récurrentes de l'écoulement, pour la fréquence f .

Taux de croissance : L'équation (1.69) indique également que les états transitoires peuvent être captés par la DMD. Le lecteur attentif pourra noter la similitude entre l'équation (1.34) et l'équation (1.19). L'opérateur d'évolution A peut être considéré comme une approximation de l'opérateur de propagation d'une perturbation \mathcal{A} de Navier-Stokes. Dans le cas d'une dynamique linéaire, alors $A = \mathcal{A}(dt)$. Comme le précise Rowley *et al.* [152], pour une dynamique linéaire, les modes DMD sont les modes globaux du système. Que l'équation (1.69) indique que les états transitoires peuvent être captés par la DMD n'est donc pas surprenant. Dès lors qu'une valeur propre a un module ρ supérieur à l'unité, l'amplitude du mode associé croît au cours du temps. Le mode correspond donc à une dynamique transitoire, non-saturée. Dans le cas contraire, un module inférieur à l'unité traduit un comportement évanescent, avec une amplitude exponentiellement décroissante.

Néanmoins, des repliements de spectre peuvent conduire à des interprétations erronées lorsque la décomposition se base sur un ensemble de données sous-échantillonnées (si des fréquences, dans le phénomène observé, sont supérieures à la limite de Shannon-Nyquist). La figure 1.2 illustre un cas où l'échantillonnage à 10 Hz est trop petit pour capter la dynamique du signal (rouge), oscillant à 9 Hz. La fréquence d'échantillonnage minimum devrait être 18 Hz. Sur la durée de mesure, une basse fréquence à 1 Hz sera identifiée. Il est également possible qu'un mauvais taux de croissance soit calculé. Si la plage d'observation est inférieure à 0.5 s, la DMD identifie, dans cet exemple, un mode associé à un taux de croissance $\rho = 1.36$.

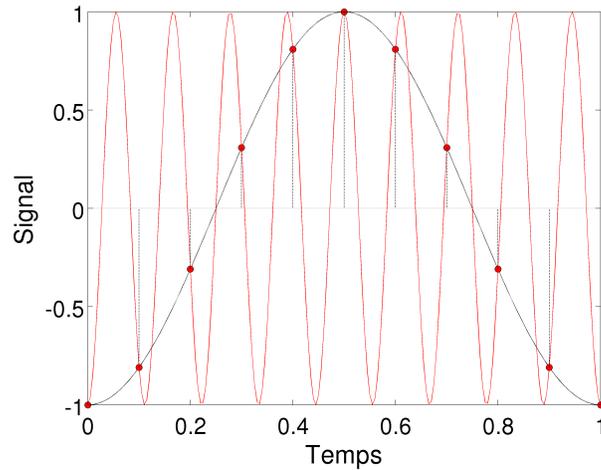


Figure 1.2 – Illustration des conséquences d'un mauvais échantillonnage.

Normalisation des modes spatiaux : Lorsque les modes sont normés, les préfacteurs a_i^0 traduisent la contribution "énergétique", au sens de la norme \mathcal{L}_2 , des modes.

Par conséquent, un spectre DMD peut être construit, en associant à chaque canal fréquentiel f l'amplitude du mode a_i^n correspondant. Le choix $n = N$ ou respectivement $n = 0$ permet de mettre en avant les modes croissants ou respectivement évanescents. Chen *et al.* ont montré [26] que, lorsque la matrice compagnon est construite sur un ensemble de fluctuations (*i.e.* centré sur 0), la décomposition en modes dynamiques est identique à une décomposition en modes de Fourier globaux.

1.3.2 Héritage des propriétés spatiales

Une autre propriété importante des modes dynamiques réside dans leur héritage des propriétés spatiales du champ. Prenons comme exemple la divergence du champ de vitesse, nulle dans le cas d'un écoulement incompressible. La démonstration est identique pour tout opérateur spatial linéaire. Lorsque l'observable \mathbf{u} est le champ de vitesse d'un écoulement incompressible, alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.70)$$

où $\nabla = (\partial_{x_i})^\dagger$. En développant le champ de vitesse sur la base des modes DMD (1.68) :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \cdot \left(\sum_i e^{\sqrt{-1}\omega_i t} \Phi_i(\mathbf{r}) \right) \\ &= \sum_i \nabla \cdot \left(e^{\sqrt{-1}\omega_i t} \Phi_i(\mathbf{r}) \right) \\ &= \sum_i e^{\sqrt{-1}\omega_i t} \nabla \cdot \Phi_i(\mathbf{r}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par souci de lisibilité, et sans aucune perte de généralité, on suppose que les taux de croissances ρ_i et les amplitudes a_i^0 des modes sont unitaires. La relation suivante s'obtient alors en multipliant à gauche par $e^{-\sqrt{-1}\omega_j t}$:

$$e^{\sqrt{-1}\omega_j t} \times \sum_i e^{\sqrt{-1}\omega_i t} \nabla \cdot \Phi_i(\mathbf{r}) = \sum_i e^{\sqrt{-1}\omega_j t} \times e^{\sqrt{-1}\omega_i t} \nabla \cdot \Phi_i(\mathbf{r}), \quad (1.71)$$

ce qui est toujours égal à zéro. Alors, en intégrant sur le temps :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i e^{-\sqrt{-1}\omega_j t} \times e^{\sqrt{-1}\omega_i t} \nabla \cdot \Phi_i(\mathbf{r}) dt &= \sum_i \nabla \cdot \Phi_i(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}\omega_j t} \times e^{\sqrt{-1}\omega_i t} dt \\ &= \nabla \cdot \Phi_j(\mathbf{r}) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (1.72)$$

en se rappelant que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{-1}\omega_j t} \times e^{\sqrt{-1}\omega_i t} dt = \delta(j, i)$, où δ est la fonction de Kroenecker. La divergence de chaque mode DMD est par conséquent, comme pour l'observable \mathbf{u} , égale à zéro.

1.4 Variantes de la DMD

1.4.1 Bases de données singulières

L'algorithme de Décomposition en Modes Dynamiques a déjà prouvé son efficacité pour extraire tout à la fois des structures spatiales et fréquentielles pertinentes, y compris dans le cas de jeux de données bruitées [155, 36, 156]. Néanmoins, contrairement à la Décomposition Orthogonale Propre par exemple, l'algorithme DMD nécessite une stratégie d'échantillonnage particulière, avec la contrainte d'avoir des observations réalisées avec un pas de temps constant. Lors du processus d'acquisition de données, ce type de contrainte peut poser des difficultés. A titre d'exemple, considérons la situation classique, en mécanique des fluides, où l'observable est un champ à deux composantes, de dimension deux (2D2C), obtenu par *Vélocimétrie par Images de Particules* (PIV). En PIV, une observable est typiquement un champ de 1000×1000 pixels. Supposons que la fréquence pertinente la plus élevée de l'écoulement soit à 100 Hz (hypothèse raisonnable pour un écoulement turbulent), le critère de Shannon-Nyquist impose alors une fréquence d'échantillonnage supérieure à 200 Hz. Avec des images de 12-bit, la bande passante nécessaire est ainsi supérieure à 1 Gb/s. De plus, si le spectre de Fourier de la dynamique est à large bande, la durée de l'acquisition de données doit être importante. La combinaison d'une haute fréquence d'échantillonnage et d'une longue durée d'acquisition conduit à des contraintes sévères, tant pour le matériel de mesure que pour les ressources de traitements de données et de stockage.

De surcroît, certaines mesures de l'observable peuvent être corrompues, par des causes internes ou externes à l'expérience, par exemple, un trop grand nombre de faux vecteurs en PIV. S'il est souvent possible de remplacer les données manquantes ou corrompues, par diverses techniques telle la gappy-POD [41], de l'information non physique risque d'être introduite, en particulier dans le contenu spectral.

Faire la projection (*cf.* equation (1.44)) ou la Décomposition en Valeurs Singulières sur l'ensemble des réalisations K_1^N , dans le cas de jeux de données de grandes dimensions,

implique de manipuler des matrices de grandes tailles. De tels calculs peuvent devenir très coûteux. Prenons l'hypothèse où la dimension des observables n_p est très grande devant le nombre de réalisations N . Dans ce cas, le coût d'une SVD est $\mathcal{O}(n_p N^2)$ flops, ce qui peut devenir prohibitif, *e.g.* pour des résultats de simulations 3D en espace et résolu en temps. D'autres exemples de domaines fournissant de très hautes résolutions sont l'astrophysique ou la météorologie, avec une résolution 2D supérieur à 10^4 par direction d'espace pour le satellite météo **Geo-1**. La quantité de RAM nécessaire pour la décomposition en valeurs singulières, du même ordre de grandeur que le coût, peut limiter l'utilisation de la DMD dans de tels cas.

Chen *et al.* ont déjà proposé [26] un algorithme, l'Optimized-DMD, afin de réaliser une DMD lorsque peu de réalisations sont disponibles. Dans les deux sections suivantes, nous proposons la DMD non-uniforme (section 1.4.2) et l'éco-DMD (section 1.4.3), deux algorithmes dérivés de la DMD et la généralisant à tout type de base de données. Ils permettent d'identifier les propriétés spatiales et temporelles d'une collection de réalisations, notamment si les dimensions sont très grandes ou si l'échantillonnage est arbitraire. La première méthode est à même de traiter des jeux de données dont la stratégie d'échantillonnage utilisée est quelconque, tandis que la seconde est très efficace en terme de charge mémoire et de coût de calculs. Enfin, une dernière partie traite d'une nouvelle variation de la DMD, la *chronos-DMD* (section 1.4.4), qui permet une analyse plus fine des liens entre les modes DMD et l'énergie de l'écoulement.

1.4.2 DMD Non-Uniforme

1.4.2.1 Réécriture de la Décomposition en Modes Dynamiques

La décomposition recherchée a pour but d'être, *in fine*, identique à la DMD, c'est-à-dire l'observable \mathbf{u} doit être décrite par une base spatiale, dont les coefficients temporels sont des exponentiels complexes :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \approx \sum_{k=1}^{N_{\text{md}}} e^{i\sigma_k t} \Phi_k(\mathbf{r}) \equiv \sum_{k=1}^{N_{\text{md}}} \lambda_k^t \Phi_k(\mathbf{r}), \quad (1.73)$$

avec N_{md} le nombre de modes choisis pour la décomposition.

Par abus d'écriture, la notation $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t_i) = \mathbf{u}_{t_i}$ est utilisée par la suite. La méthode repose sur l'analyse d'une collection de données constituée de N réalisations : $\{\mathbf{u}_{t_i}\}_{i=1}^N$, $t_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$. La différence fondamentale avec l'approche DMD standard est que les temps t_i sont maintenant choisis arbitrairement, et non nécessairement ordonnés. Ces N champs de données forment une pseudo-matrice de Krylov $\mathbb{R}^{n_p \times N} \ni K = \{\mathbf{u}_{t_1} \mathbf{u}_{t_2} \dots \mathbf{u}_{t_N}\}$, où n_p est la dimension d'une observable. Comme pour la DMD, les champs $\{\mathbf{u}_{t_i}\}_{i=1}^N$ sont représentés sous forme de vecteurs.

En développant l'équation (1.73),

$$\mathbf{u}_{t_i} \approx \lambda_1^{t_i} \Phi_1 + \lambda_2^{t_i} \Phi_2 + \dots + \lambda_{N_{\text{md}}}^{t_i} \Phi_{N_{\text{md}}}, \quad (1.74)$$

qui peut être réécrite matriciellement :

$$K = MV + R \approx MV, \quad (1.75)$$

où R est une matrice de résidu, $V \in \mathbb{C}^{N_{\text{md}} \times N}$ est une pseudo matrice de Vandermonde :

$$V := \begin{pmatrix} \lambda_1^{t_1} & \lambda_1^{t_2} & \dots & \lambda_1^{t_N} \\ \lambda_2^{t_1} & \lambda_2^{t_2} & \dots & \lambda_2^{t_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N_{\text{md}}}^{t_1} & \lambda_{N_{\text{md}}}^{t_2} & \dots & \lambda_{N_{\text{md}}}^{t_N} \end{pmatrix},$$

et finalement $M \in \mathbb{C}^{n_p \times N_{\text{md}}}$ une matrice contenant les modes spatiaux :

$$M = (\Phi_1 \dots \Phi_{N_{\text{md}}}). \quad (1.76)$$

Pour écrire l'équation (1.73), il faut avoir accès aux deux matrices qui viennent d'être définies, la pseudo Vandermonde V et la matrice des modes M . Les modes peuvent être approximés en inversant l'équation (1.75) :

$$M \approx K V^+, \quad (1.77)$$

où V^+ est soit l'inverse de V dans le cas $N_{\text{md}} = N$, ou, le cas échéant, la pseudo-inverse de Moore-Penrose de V .

1.4.2.2 Minimisation du résidu

Chen *et al.* [26] proposent de substituer l'écriture de la matrice M dans l'équation (1.75), afin d'obtenir une équation ne dépendant que de la matrice de Vandermonde :

$$K \approx K V^+ V + R. \quad (1.78)$$

Déterminer V s'obtient alors en minimisant une norme de la matrice des résidus R :

$$R \approx K (I_N - V^+ V). \quad (1.79)$$

L'identification de la pseudo-Vandermonde V peut se faire, par exemple, par minimisation de la norme de la matrice résidu R . Les modes se déduisent alors de (1.77).

La NU-DMD permet donc l'identification des fréquences et des modes DMD, en relaxant toutes les contraintes imposées sur l'échantillonnage.

1.4.3 Éco-DMD

Les propriétés fréquentielles d'un écoulement sont présentes, *ad minima*, dans des zones spatialement étendues. Appliquer la DMD sur des sous parties du domaine plutôt que sur le domaine entier doit donc, *a priori*, être efficace pour capter les propriétés fréquentielles de l'écoulement.

L'éco-DMD se base sur ce postulat pour effectuer l'analyse spectrale sur un jeu de données plus petit, ce qui peut se résumer à estimer la matrice de Vandermonde V de l'équation (1.75). Ensuite, une fois les propriétés spectrales identifiées, l'équation (1.77) permet de calculer les modes spatiaux.

1.4.3.1 Identification de la matrice de Vandermonde

Le théorème de Takens [133, 169] assure qu’une série temporelle d’une observable, de durée infinie, dans un système non-linéaire, contient la totalité de la dynamique du système. La décomposition en modes dynamiques peut être vue comme l’analyse simultanée de nombreuses séries temporelles. Dans ce cas, considérer une observable dégradée *en espace*, *i.e.* prendre moins de séries temporelles, devrait néanmoins être suffisant pour capter les propriétés spectrales de l’écoulement. Pour s’en convaincre, il suffit de faire le lien entre la DMD et l’opérateur de Koopman, présenté par l’équation (1.35). Rowley *et al.* [152] et Mezic [124] ont utilisé l’algorithme DMD pour estimer les valeurs propres de l’opérateur de Koopman du système dynamique associé à l’écoulement. Cet opérateur est indépendant des observables, il est défini par et ne dépend que du flot dynamique $\phi_{\Delta t}$. Par conséquent, changer d’observable – ici réduire sa dimension spatiale – ne doit pas changer les propriétés spectrales de l’opérateur. Toutes les propriétés spectrales de l’écoulement doivent être retrouvées.

L’option choisie est donc de décimer le jeu de données original, afin de faire une analyse DMD sur une collection de réalisations de dimension réduite. Seules les valeurs propres λ issues de l’analyse sont conservées, et utilisées ensuite pour la construction d’une pseudo matrice de Vandermonde. Les modes peuvent alors se déduire de l’équation (1.77).

D’autres alternatives existent pour estimer les propriétés spectrales du système considéré. Par exemple, une analyse de Fourier, sur une ou plusieurs séries temporelles de l’observable \mathbf{u} , permettrait d’identifier les fréquences principales en jeu dans l’écoulement. Néanmoins, l’analyse de Fourier ne peut donner les taux de croissances associés à ces fréquences, et des séries temporelles longues sont nécessaires.

Dans le cas de jeu de données avec (très) peu d’observations (*i.e.* quand N est petit), Chen *et al.* [26] a utilisé un algorithme, l’Optimized-DMD, pour calculer un petit nombre de modes. L’idée directrice de cette méthode est de minimiser le résidu matriciel \mathbf{R} de l’équation (1.75), afin d’identifier les fréquences complexes. Lorsque le résidu est minimal, les fréquences sont optimales pour décrire le jeu de données. Néanmoins, comme précisé dans la partie 1.4.2, l’échantillonnage doit être constant. Dans le cadre le plus général, la NU-DMD présentée dans la section 1.4.2 permet l’identification de fréquence.

Dans la suite de cette partie, le prétraitement utilisé par la méthode présentée sera une DMD, qui pourra être remplacée, au cas par cas, par une méthode plus adaptée.

1.4.3.2 Algorithme de l’éco-DMD

La première étape est le choix d’une nouvelle observable $\tilde{\mathbf{u}}$. Cette observable $\tilde{\mathbf{u}}$ est dégradée en espace par rapport à l’observable initiale \mathbf{u} , *i.e.* $\tilde{\mathbf{u}}$ appartient à l’espace $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, un sous-espace de l’espace des observables Ω . La dimension \tilde{n}_p de la nouvelle observable est inférieure à la dimension n_p de l’observable \mathbf{u} .

On construit ensuite le sous-espace de Krylov $\tilde{K}_1^{\tilde{N}} = \{\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_{\tilde{N}-1}, \tilde{\mathbf{u}}_{\tilde{N}}\}$, avec le nombre d’échantillons retenus \tilde{N} pouvant être plus faible que le nombre d’échantillons à dispositions N . \tilde{N} doit être plus grand que le nombre de modes N_{md} désiré.

L’étape suivante consiste à identifier les exponentielles complexes servant à la construction de la matrice de Vandermonde. Une DMD est réalisée sur le sous-espace de

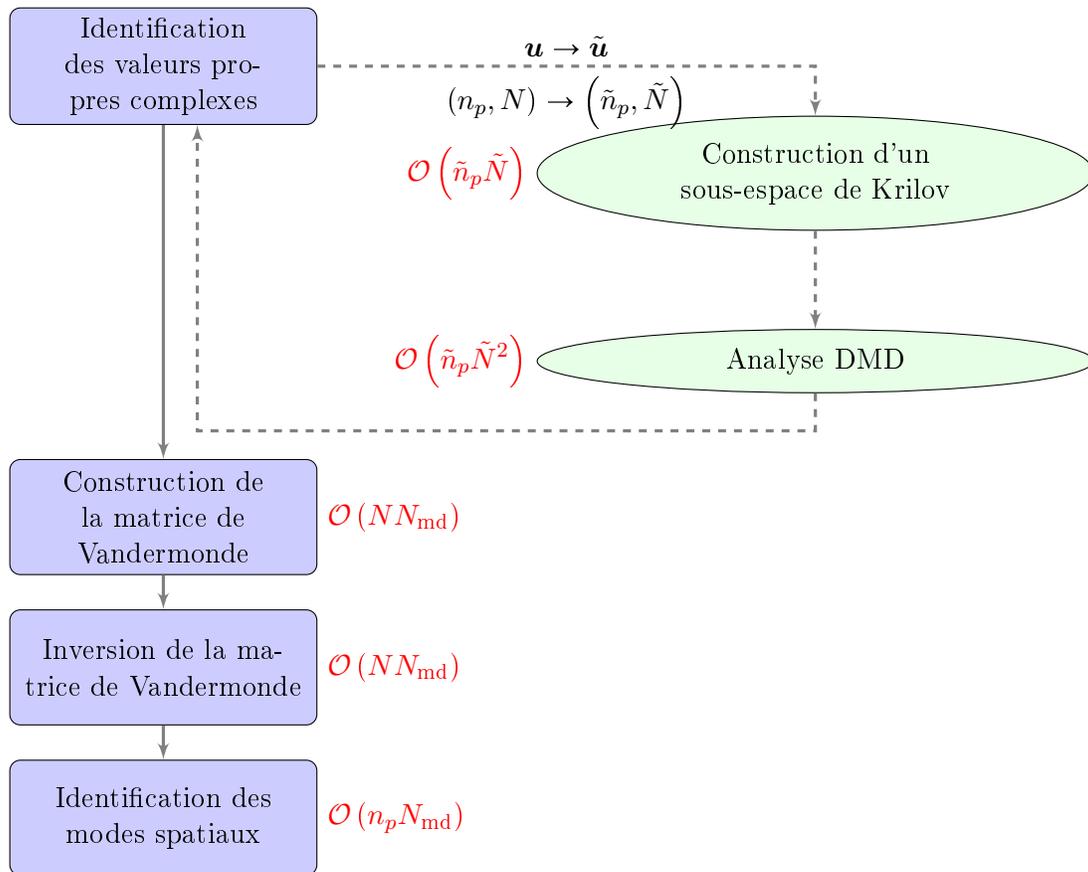


Figure 1.3 – Principales étapes de l’algorithme et coûts informatiques associés (en rouge) en flops.

Krylov réduit $\tilde{K}_1^{\tilde{N}}$. C’est le point clé de cet algorithme : faire des calculs sur un jeu de données aux dimensions réduites. Seules les valeurs propres λ résultantes de l’analyse DMD sont conservées.

Une fois la matrice de Vandermonde V déterminée par ce moyen, il est possible de calculer les modes Φ_i complets, à partir de l’ensemble K_1^N non dégradé, par :

$$M \approx K_1^N V^+, \quad (1.80)$$

Les modes spatiaux $\tilde{\Phi}_i$ dégradés identifiés peuvent néanmoins être utilisés pour l’identification des préfacteurs a_i^1 des modes (voir l’équation (1.68)), nécessaires pour la reconstruction de l’observable $\mathbf{u}_n = \sum_i a_i^1 \lambda_i^n \Phi_i$. Le calcul peut être toujours fait sur le

sous-espace de Krylov dégradé $\tilde{K}_1^{\tilde{N}}$, ce qui donne lieu à une projection économique, sur un espace de dimension \tilde{n}_p plutôt que n_p . Par la suite, les modes $\tilde{\Phi}_i$ ne sont plus utilisés. L’algorithme peut être trouvé sous forme schématique sur la figure 1.3.

1.4.3.3 Coûts calculatoires

Inversion de la matrice de Vandermonde Lorsque $N_{\text{md}} = N$, alors l'inverse V^+ de la matrice de Vandermonde V est définie. Le cas échéant, la complexité de l'algorithme de calcul de V^{-1} est $\mathcal{O}(N^2)$ flops, en utilisant un algorithme de Parker-Traub [59, 40]. Dans le cas contraire, V^\dagger est la pseudo-inverse de Moore-Penrose de V . La complexité algorithmique reste $\mathcal{O}(N_{\text{md}}N)$ flops, en utilisant le schéma de Rutishauser-Gragg-Harrod [140].

Comparaison des coûts de la SVD La *complexité algorithmique* [134] (c'est-à-dire le coût) d'une analyse DMD provient principalement de la décomposition en valeurs singulières du jeu de données. En utilisant la méthode proposée par Schmid [155], (*cf.* equation (1.62)), l'identification de la matrice similaire est basée sur la SVD du jeu de données. Si l'on identifie la matrice similaire en calculant la matrice compagnon du système, l'identification de la dernière colonne de cette matrice (*cf.* equation (1.44)) se fait en général par une projection oblique. En pratique, cette projection nécessite l'inversion de la matrice $(K_1^{N\dagger} K_1^N)$, qui est équivalent à la SVD sur le jeu de données K_1^N (voir par exemple l'équation (1.14)). Le coût de ces décompositions en valeurs singulières est $\mathcal{O}(n_p N^2)$ flops. Lorsque l'on cherche la matrice similaire sous la forme d'une matrice d'Hessenberg, le coût de l'orthonormalisation de Gram-Schmitt, bien plus lourd, est $\mathcal{O}(n_p^2 N)$ flops [60]. On ne considérera donc pas cette méthode par la suite, mais le lecteur pourra noter que l'éco-DMD est d'autant plus efficace pour réaliser la décomposition modale dans cette configuration.

Une décomposition en modes dynamiques a donc une complexité, due à la décomposition en valeurs singulières de l'ensemble des réalisations, de l'ordre de $\mathcal{O}(n_p N^2)$ flops. Lors de l'algorithme éco-DMD, l'étape la plus coûteuse reste la SVD du jeu de données, mais cette décomposition est effectuée sur une matrice $\tilde{K}_1^{\tilde{N}}$ de taille $\tilde{n}_p \times \tilde{N}$. Le cout global est donc réduit à $\mathcal{O}(\tilde{n}_p \tilde{N}^2)$ flops.

1.4.4 Une décomposition spectrale et énergétique

L'interprétation précise du spectre obtenu par décomposition en modes dynamiques est délicat. Les modes dynamiques ne sont pas orthogonaux, par conséquent, ils partagent naturellement de "l'énergie" par projection lorsque l'on reconstruit le champ. Caractériser la contribution énergétique d'un mode DMD par sa norme \mathcal{L}_2 est donc une approche incomplète.

Avec Cammilleri *et al.* [23], nous avons proposé de coupler les avantages de la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD), pour l'interprétation énergétique, et de la DMD, pour l'interprétation spectrale.

1.4.4.1 Présentation

La première étape est de réaliser une décomposition orthogonale aux valeurs propres du jeu de données :

$$K_1^{N+1} = M V^\dagger, \quad (1.81)$$

avec $M = \{\boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_{N+1}\}$ la matrice des *topos* et $V^\dagger = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{N+1}\}$ la matrice des *chronos*.

Les *chronos* résultant de l'analyse POD sont des séries temporelles (voir par exemple, l'équation (1.2)), résultante du système. Une *nouvelle observable* du système est construite, basée sur les chronos :

$$\tilde{\mathbf{u}}(t_i) = (\alpha_1(t_i), \dots, \alpha_{N+1}(t_i))^\dagger, \quad (1.82)$$

pour $i \in \{1, \dots, N+1\}$. On notera par la suite par abus d'écriture $\tilde{\mathbf{u}}(t_i) \equiv \tilde{\mathbf{u}}_i$. La matrice $V^\dagger \equiv V_1^{N+1}$ est, comme dans l'équation (1.40), formellement une matrice de Krylov.

Une décomposition en modes dynamiques est ensuite réalisée sur la matrice des chronos V_1^{N+1} . Les modes résultants Φ^{cd} sont appelés Chronos-DMD.

1.4.4.2 Liens avec les autres décompositions modales

L'observable \mathbf{u} peut facilement être reconstruite, par combinaison des modes POD $\boldsymbol{\psi}$ et des modes Φ^{cd} . En se référant à l'équation (1.68), il suit :

$$\tilde{\mathbf{u}}_i = \sum_{k=1}^N a_k^1 \lambda_k^i \Phi_k^{\text{cd}}, \quad (1.83)$$

pour $i \in \{1, \dots, N+1\}$. Par la suite, pour simplifier la lecture, les modes chronos-DMD sont redimensionnés par le préfacteur issue de l'équation (1.86) :

$$\Phi_k^{\text{cd}} \equiv a_k^1 \Phi_k. \quad (1.84)$$

Comme $\tilde{\mathbf{u}}_i = (\alpha_1(t_i), \dots, \alpha_{N+1}(t_i))^\dagger$, l'observable \mathbf{u}_i est facilement construite à partir de $\tilde{\mathbf{u}}_i$, par l'injection de l'écriture POD (1.2) ou (1.81) :

$$\mathbf{u}_i = M \tilde{\mathbf{u}}_i \quad (1.85)$$

Combiner les équations (1.83) et (1.85) permet la reconstruction de l'observable :

$$\mathbf{u}_i = M \sum_{k=1}^N \lambda_k^i \Phi_k^{\text{cd}} \quad (1.86)$$

Démontrons que, si la DMD est réalisée par matrice compagnon, les valeurs propres identifiées par la chronos-DMD ou par une DMD (sur le jeu de données initial), sont les mêmes. La dernière colonne \mathbf{c}_{DMD} de la matrice compagnon est calculée par une projection oblique (*cf.* equation (1.45)), c'est-à-dire :

$$\mathbf{c}_{DMD} = \left(K_1^{N\dagger} K_1^N \right)^{-1} K_1^{N\dagger} \mathbf{u}_{N+1}. \quad (1.87)$$

En notant qu'en laissant la dernière observable, K_1^N peut se réécrire MV_1^N , l'équation précédente devient :

$$\mathbf{c}_{DMD} = \left((MV_1^N)^\dagger MV_1^N \right)^{-1} (MV_1^N)^\dagger \mathbf{u}_{N+1}. \quad (1.88)$$

Ce qui donne, en réorganisant les termes :

$$\mathbf{c}_{DMD} = \left((V_1^{N\dagger} M^\dagger) M V_1^N \right)^{-1} (V_1^{N\dagger} M^\dagger) \mathbf{u}_{N+1}. \quad (1.89)$$

L'équation (1.85) permet de décomposer l'observable \mathbf{u}_{N+1} :

$$\mathbf{c}_{DMD} = \left(V_1^{N\dagger} M^\dagger M V_1^N \right)^{-1} (V_1^{N\dagger} M^\dagger) M \tilde{\mathbf{u}}_{N+1}. \quad (1.90)$$

L'orthonormalité des modes POD, *i.e.* $M^\dagger M = \mathcal{I}d$ permet de conclure :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{DMD} &= \left(V_1^{N\dagger} V_1^N \right)^{-1} V_1^{N\dagger} \tilde{\mathbf{u}}_{N+1} \\ &= \mathbf{c}_{cDMD}. \end{aligned} \quad (1.91)$$

La dernière colonne de la matrice compagnon identifiée sur le jeu de données complet correspond bien à la dernière colonne \mathbf{c}_{cDMD} de la matrice compagnon, lorsqu'on réalise une DMD sur la matrice des chronos. Ce résultat n'est pas une surprise, lorsque l'on se rappelle du lien entre la DMD et l'opérateur de Koopman (*cf.* la définition (1.35)). En réalisant la chronos-DMD, on ne fait que changer l'observable du système, il est donc attendu que les valeurs propres de l'opérateur ne change pas.

De fait, en isolant la composante fréquentielle dans l'équation (1.86), les modes DMD Φ suivent :

$$\Phi_i = M \Phi_i^{\text{cd}}. \quad (1.92)$$

On peut illustrer graphiquement les liens présentés équations (1.86) et (1.92) entre décompositions POD, décomposition DMD et chronos-DMD, présenté figure 1.4. Réaliser une analyse DMD sur les *chronos* répartie selon les canaux fréquentiels associé à la DMD, l'énergie des modes POD.

1.4.4.3 Discussion sur l'énergie associée aux modes chronos-DMD

Dans cette section, on étudie la répartition de l'énergie d'un écoulement selon les modes que l'on a identifié. Cette étude n'a de sens que pour une dynamique saturée. Par conséquent, on suppose dans la suite de cette section que les valeurs propres λ_i sont toutes de module 1, *i.e.* que la dynamique et les modes ne sont pas dans des états transitoires.

L'équation (1.92) permet de relier chaque composante fréquentielle à une énergie. En effet, lorsque le produit matriciel est développé, alors l'équation (1.92) devient :

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^N \psi_j \Phi_i^{\text{cd}}(j). \quad (1.93)$$

Le mode DMD Φ_i peut donc être vu comme la somme des modes POD ψ_j pondérés par $\Phi_i^{\text{cd}}(j)$. Soit la quantité ζ_i , défini par :

$$\zeta_i = \sum_{k=1}^N |\Phi_k^{\text{cd}}(i)|^2. \quad (1.94)$$

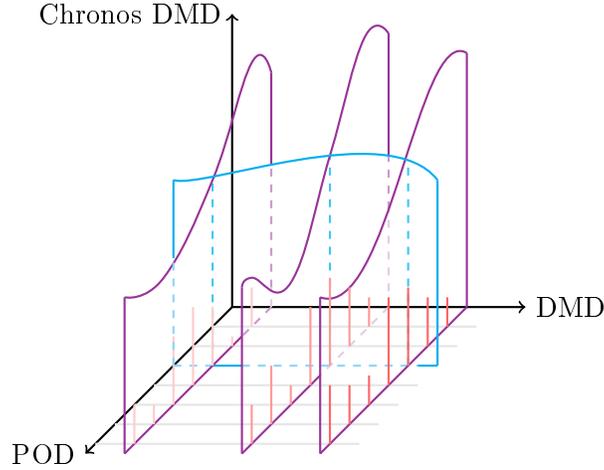


Figure 1.4 – Représentation symbolique des modes Chronos-DMD (violet) par rapport aux modes DMD et aux *topos* des modes POD (bleu). Les barres rouges symbolisent la contribution du *chronos* associé au mode POD à la fréquence du mode DMD correspondant.

Le carré de l'équation (1.83) est moyenné temporellement. En sélectionnant la composante i de $\tilde{\mathbf{u}}$ (*i.e.* le *chronos* α_i), l'égalité suivante est immédiate :

$$\langle \alpha_i^2 \rangle = \zeta_i, \quad (1.95)$$

la quantité ζ_i correspond donc à l'énergie du mode POD i .

Il est possible de formaliser l'énergie ϵ_i correspondant à un mode chronos-DMD Φ_i^{cd} , comme lors de la construction d'un spectre DMD (*cf.* section 1.3.1) :

$$\epsilon_i = \sum_{k=1}^N |\Phi_i^{\text{cd}}(k)|^2 \quad (1.96)$$

Si la contrainte initiale que les valeurs propres ne sont pas distribuées sur le cercle unité est relaxée, on peut néanmoins considérer que l'énergie $\langle \alpha_k^2 \rangle$ du mode POD k est distribuée au premier ordre sur les canaux fréquentiels i par le facteur $\frac{|\Phi_i^{\text{cd}}(k)|^2}{\zeta_k}$. L'énergie d'un mode chronos-DMD est alors la somme sur les chronos de toutes ces contributions.

$$\epsilon_i = \sum_{k=1}^N \langle \alpha_k^2 \rangle \frac{|\Phi_i^{\text{cd}}(k)|^2}{\zeta_k} \quad (1.97)$$

Le lecteur pourra vérifier que cette expression dégénère bien vers l'équation (1.96) dans la cas idéal de valeurs propres distribuées sur le cercle unité.

Le point majeur de la chronos-DMD est donc que l'utilisation des chronos comme observables, contrairement à l'approche standard DMD, permet de retrouver l'énergie complète de l'écoulement. L'identification, pour chaque canal fréquentiel, de sa contribution sur l'énergie, est rendu possible, contrairement à l'approche standard par DMD.

1.5 Note sur la sélection d'observables

Dans le cas de l'éco-DMD ou de la NU-DMD présentées précédemment, on peut supposer que sélectionner un sous-ensemble de points $\tilde{\mathbf{u}}$ (construisant une observable décimée, parmi l'observable \mathbf{u}) peu pertinents au sens de la dynamique, amènera une identification incorrecte des fréquences, car la matrice de Vandermonde, construite sur ces fréquences, n'est pas représentative de la dynamique du système. Les modes dynamiques identifiés seront donc non-physiques, et les structures associées aux modes seront fausses.

C'est en pratique dû à de mauvaises propriétés d'observabilité des points choisis.

Dans la suite de cette section, je propose un algorithme pour estimer les propriétés d'observabilité des composantes du vecteur d'état, sans connaître les équations gouvernant le système dynamique. Cet algorithme, la DMD-observabilité, se base sur l'estimation et l'analyse de l'opérateur d'évolution de la dynamique par DMD. On considère, dans la section suivante, la réalisation du champ \mathbf{u} comme le coeur d'un nouveau système dynamique. En pratique, \mathbf{u} est maintenant notre vecteur d'état. L'observable décimée $\tilde{\mathbf{u}}$ sera appelée observable dans la suite.

1.5.1 Définition de l'Observabilité

L'observabilité est une propriété généralement déterminée par le rang de la matrice de Kalman [91]. Si l'on réécrit l'équation (1.42) sous la forme d'un système matricielle, où A est maintenant un opérateur matriciel :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1} &= A\mathbf{u}_n \\ \tilde{\mathbf{u}}_n &= C\mathbf{u}_n \end{cases}, \quad (1.98)$$

avec $\mathbf{u} \in \Omega$ est le vecteur d'état, et $\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{\Omega}$ est le vecteur des observables. L'opérateur A est donc maintenant une matrice de dimension finie, le vecteur d'état \mathbf{u} étant de dimension n_p . La matrice C est la projection depuis l'espace des phases Ω , sur l'espace (réduit) des observables, $\tilde{\Omega}$. Donc, C est une matrice de dimensions $\tilde{n}_p \times n_p$.

Si l'on se restreint au cadre de l'éco-DMD, $\tilde{\mathbf{u}}$ est extrait du vecteur d'état \mathbf{u} . Par conséquent, les éléments de C ne sont que des 1 ou des 0. En effet, la i ème ligne de C n'est composée que de 0 sauf pour un élément c_{ij} , tel que $\tilde{\mathbf{u}}_i = \mathbf{u}_j$.

La matrice de Kalman d'observabilité $\mathcal{K} \in \mathcal{M}_{n_p \times \tilde{n}_p, n_p}$ est définie comme :

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n_p-1} \end{pmatrix}. \quad (1.99)$$

Si le rang de cette matrice \mathcal{K} est égale à n_p , alors le système est dit observable, et la reconstruction du vecteur d'état \mathbf{u} , en ne connaissant que $\tilde{\mathbf{u}}$, possible [91]. Les propriétés d'observabilité de l'observable $\tilde{\mathbf{u}}$ sont donc maximales.

En mécanique des fluides, il est rare d'avoir accès à l'opérateur d'évolution. A n'est généralement pas connu. Néanmoins, l'algorithme DMD permet d'accéder à une estimation de l'opérateur A , en utilisant l'équation (1.65) :

$$A \approx USU^\dagger. \quad (1.100)$$

En pratique, calculer A^i pour construire la matrice de Kalman de l'équation (1.99), pour $i > 1$ est risqué. A est seulement estimé. Les modules des valeurs propres de A sont souvent différents de 1, et par suite le conditionnement de l'opérateur A^i explose. De plus, la dimension de \mathcal{K} est très grande, de telle façon que l'estimation du rang de \mathcal{K} n'est pas possible.

1.5.2 Propagation d'un champ

On se propose donc, pour quantifier la qualité d'observabilité d'un point du champ, de regarder l'évolution du vecteur d'état. La propagation du vecteur peut être vu comme l'application à une entrée \mathbf{u}_n d'une fonction de transfert A pour obtenir la sortie \mathbf{u}_{n+1} :

$$\mathbf{u}_{n+1} = A\mathbf{u}_n,$$

la i ème composante du vecteur \mathbf{u}_{n+1} est obtenu par $\sum a_{ij}u_n^j$. Si de nombreuses composantes u_n^j de \mathbf{u} sont importantes pour l'obtention de la composante u_{n+1}^i , ie si de nombreuses composantes a_{ij} de l'opérateur A sont significativement différentes de zéro sur la i ème ligne de A , alors la sortie u_{n+1}^i utilise de l'information provenant d'une grande partie de l'entrée, c'est-à-dire du vecteur d'état \mathbf{u} . Donc, une telle composante du vecteur d'état est probablement une composante à considérer comme élément de l'observable $\tilde{\mathbf{u}}$.

De manière similaire, un faible nombre de composantes a_{ji} significative sur la i ème colonne de l'opérateur A , implique que la i ème composante du vecteur d'état \mathbf{u} à une faible influence sur l'évolution des autres composantes $j \neq i$ du vecteur d'état. La dynamique d'évolution de cette i ème composante est spatialement localisée. En suivant la définition de l'observabilité, une telle composante doit également être considérée, afin de pouvoir capter toute la dynamique du système : dans le cas contraire, la rang de la matrice de Kalman ne serait pas maximal.

1.5.3 Définition de la DMD-Observabilité

J'ai donc proposé d'estimer la qualité d'observabilité de la k ème composante u^k du vecteur d'état \mathbf{u} par une quantité σ_α , appelée la DMD-Observabilité.

En prenant en compte les deux commentaires de la section précédente, la DMD-Observabilité (DMD-O) est calculée sur le nombre de composantes significatives de l'opérateur d'évolution A , que l'on estime grâce à l'équation (1.100).

La i ème composante de \mathbf{u}_{n+1} est donnée par la somme $\sum a_{ij}u_n^j$. On doit pondérer les composantes a_{ij} par rapport à la moyenne temporelle $\langle \mathbf{u} \rangle^i \equiv \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{e}_i$ de la i ème composante du vecteur d'état \mathbf{u} :

$$\bar{a}_{.i} = \frac{a_{.i}}{\langle \mathbf{u} \rangle^i}$$

Une composante a_{ij} est significative dès lors que la quantité \bar{a}_{ij} est plus grande qu'un seuil donné. Si n_l est le nombre de composantes significatives de la k ème ligne de l'opérateur A , et que n_c est le nombre de composante significative de la k ème colonne, alors on définit la DMD-Observabilité comme :

$$\sigma_\alpha(k) = \frac{1}{n_p} (\alpha n_l + (1 - \alpha) (n_p - n_c)) \quad (1.101)$$

La DMD-Observabilité, comprise dans $\{0, 1\}$, est la moyenne pondérée par α entre la capacité d'une composante à collecter de l'information dynamique provenant des autres composantes du vecteur d'état, et son propre poids dans la dynamique des autres composantes. On définit le vecteur de DMD-Observabilité, \mathcal{S} , comme étant le vecteur formé des quantités σ_α :

$$\mathcal{S} = \{\sigma_\alpha(1), \dots, \sigma_\alpha(n_p)\}. \quad (1.102)$$

\mathcal{S} a donc la même dimension que le vecteur d'état, soit $n_p \times 1$. Les composantes u_i du vecteur d'état associés aux composantes σ_α du vecteur \mathcal{S} les plus importantes (ou plus grandes qu'un seuil déterminé) correspondent donc aux composantes présentant les meilleures propriétés d'observabilité. L'observable $\tilde{\mathbf{u}}$ doit donc être constituée de telles composantes pour être pertinente.

1.5.4 Note sur la Contrôlabilité

Notre définition de la DMD-Observabilité est également compatible avec la définition établie de la contrôlabilité.

L'adjoint A^\dagger de la matrice opérateur d'évolution A est, simplement, A^\dagger , la matrice transposée de A . Alors, le critère (1.101) d'observabilité, appliqué à A^\dagger et non sur A , devrait donné une estimation des qualités de contrôlabilité pour les composantes u^k du vecteur d'état \mathbf{u} , en vertu de la dualité contrôlabilité-observabilité.

En effet, compter le nombre de composantes significatives de la ligne k de A^\dagger est équivalent à compter le nombre de composantes significatives sur la colonne k de l'opérateur A . Un nombre important de composantes significative implique que u^k envoie son information dans un grand nombre de composantes du vecteur d'état. L'information du contrôle est donc transmise, ce qui est un impératif intuitif pour avoir de bonnes propriétés de contrôlabilité.

Compter le nombre de composantes significatives sur la k ème colonne de A^\dagger est maintenant équivalent à compter le nombre de composantes significatives sur la ligne k de A . Un petit nombre de composantes significatives implique que u^k est très peu dépendante des informations provenant des autres composantes. Cette partie du critère permet d'identifier des points qui sont peu influencés par l'écoulement, et donc, en ces points, le signal de contrôle est peu perturbable.

Quoiqu'il en soit, pour la caractérisation des propriétés de contrôlabilité, il faut que le jeu de données comporte des dynamiques transitoires. Des jeux de données provenant de régimes non-linéairement saturés n'auront typiquement pas ces informations nécessaires pour caractériser les propriétés de contrôlabilité.

1.6 Comparaison et qualifications des méthodes

1.6.1 Comparaisons des méthodes Compagnon/Hessenberg/SVD

Une courte étude comparative des trois méthodes pour l'identification d'une matrice similaire (voir section 1.2.2) est présentée ici. La méthodologie utilisée par Duke *et al.* [36] pour quantifier les erreurs sur la décomposition en modes dynamiques est reprise. Seule la précision quant à l'identification en fréquence est étudiée dans cette section. Les

temps de calculs relatifs théoriques concernant les trois méthodes sont déjà présentés section 1.4.3.3.

Duke *et al.* proposent dans [36], l'utilisation d'un champ synthétique, sous la forme :

$$u(x, t) = a_0 \exp(\sigma t) \sin(2\pi kx - \omega t) \exp(\gamma x) \quad (1.103)$$

Ce champ synthétique, illustré sur la figure 1.5, permet de représenter une onde, spatialement et temporellement exponentiellement amplifiée. Ce champ simple permet de con-

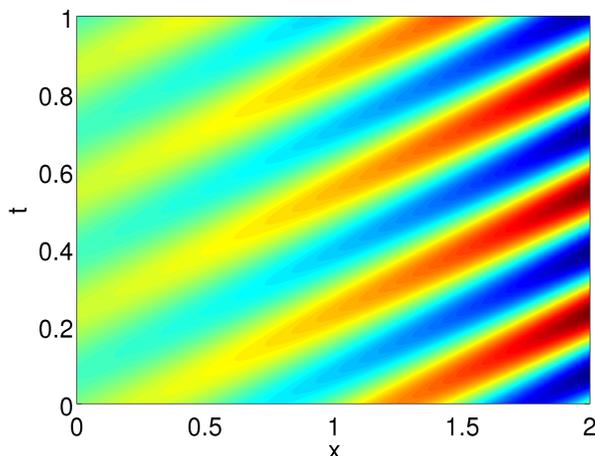


Figure 1.5 – Représentation spatio-temporelle du champ synthétique, pour $(\sigma, \gamma) = (0, 1)$

trôler précisément la fréquence ν et le taux d'amplification temporelle $\sigma \in \mathbb{R}$. La fréquence vaut $\nu = \omega/2\pi$. Une observable \mathbf{u} est construite, formée de n_p points régulièrement échantillonnés en espace, entre $[0, 2]$, avec un pas associé δx . On note $x_i = (i - 1)\delta x$. N réalisations de l'observable, échantillonnées tous les $\delta t = 1/N - 1$, entre $[0, 1]$ *i.e.* $t_i = (i - 1)\delta t$, forment l'ensemble de données. L'observable $\mathbf{u}_i \equiv \mathbf{u}(t_i)$ est donc :

$$\mathbf{u}_i = \{u(x_1, t_i), \dots, u(x_{n_p}, t_i)\}, \quad (1.104)$$

Les résultats d'une analyse DMD, pour n_p variant de 100 à 5000 et N variant de 10 à 1000 sont présentés sur la figure 1.6. L'erreur sur l'identification de la fréquence $\omega/2\pi$ est tracée en fonction du nombre de points d'espace n_p et de réalisations du champ synthétique N utilisés. Les résultats des trois méthodes respectivement par matrice compagnon, par matrice d'Hessenberg et par SVD sont présentés respectivement sur les figures 1.6(a), 1.6(b) et 1.6(c). L'échelle de couleur est la même dans chacun des cas. Le résultat principal, conforté par l'analyse de l'erreur moyenne présentée en figure 1.7, est le classement suivant, en terme de précision, entre les méthodes :

$$\text{Compagnon} \triangleleft \text{Hessenberg} \triangleleft \text{SVD}$$

Les méthode par SVD et par matrice d'Hessenberg peuvent être interprétées comme des préconditionnements de la méthode par matrice compagnon.

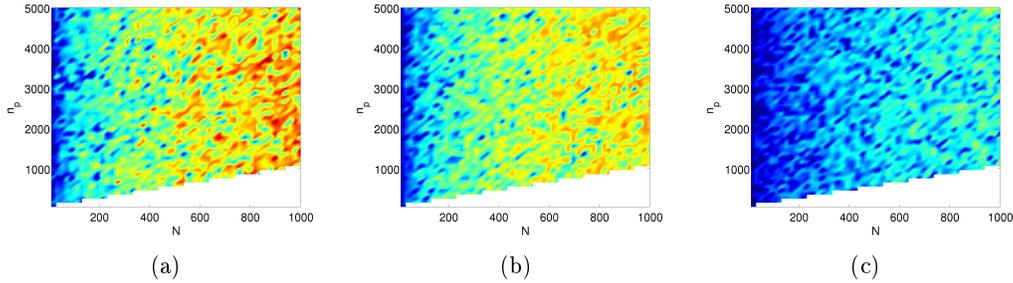


Figure 1.6 – Erreur (\log_{10}) sur l'identification de la fréquence, en fonction du nombre de points d'espace n_p et de réalisations du champ synthétique N . Les échelles de couleurs sont identiques pour les trois figures, du bleu pour une erreur de l'ordre de 10^{-16} au rouge pour une erreur de l'ordre de 10^{-12} . (a) : DMD par matrice compagnon. (b) : DMD par matrice d'Hessenberg. (c) : DMD par SVD.

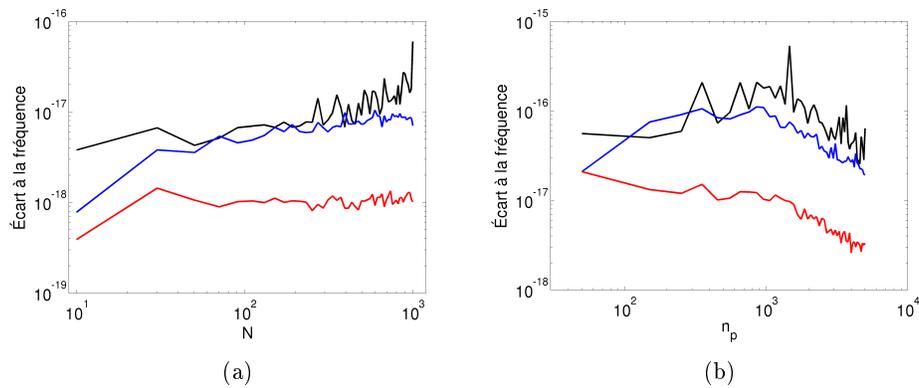


Figure 1.7 – Erreur moyenne (\log_{10}) sur l'identification de la fréquence. (a) : en fonction du nombre de points d'espace n_p , moyenne normalisée par le nombre de réalisations N . (b) : en fonction du nombre de réalisations N , moyenne normalisée par le nombre de pas d'espace n_p .

En effet, en reprenant l'équation (1.48) :

$$AK_1^N = K_1^N S_{comp}, \quad (1.105)$$

et qu'une décomposition QR de $K_1^N = QR$, où Q est la matrice orthogonale, et R est la matrice triangulaire supérieure, est réalisée, la multiplication à droite par R^{-1} de l'équation précédente donne :

$$\begin{aligned} AQ &= K_1^N S_{comp} R^{-1} \\ &= \underbrace{Q R S_{comp} R^{-1}}_{S_{hess}}. \end{aligned} \quad (1.106)$$

Identiquement, en reprenant l'équation (1.105) et qu'une décomposition en valeurs singulières de $K_1^N = U\Sigma V^\dagger$ est réalisée, si l'on multiplie à droite par $V\Sigma^{-1}$:

$$\begin{aligned} AU &= K_1^N S_{comp} V\Sigma^{-1} \\ &= U \underbrace{\Sigma V^\dagger S_{comp} V\Sigma^{-1}}_{S_{svd}}. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Ces préconditionnements expliquent le résultat précédent. La décomposition en valeurs singulières est connue pour être un meilleur préconditionnement que la décomposition QR. La faible différence entre la méthode par matrice compagnon et la méthode par matrice d'Hessenberg est due à l'utilisation de la projection oblique, le logiciel utilisé (MatLab) réalisant automatiquement un préconditionnement lors de l'inversion de matrice.

1.6.2 Qualification de la DMD Non-Uniforme

L'écoulement synthétique présenté précédemment permet de vérifier l'utilisabilité de la DMD Non-Uniforme. Une erreur, ϵ , peut être ajoutée :

$$u(x, t) = (a_0 + \epsilon) \exp(\sigma t) \sin(2\pi kx - \omega t) \exp(\gamma x), \quad (1.108)$$

où ϵ est un bruit blanc. La pulsation ω est fixée à 20, soit une fréquence $f_{vrai} = \omega/2\pi = 3.1831\dots$. Le nombre d'onde k , l'amplitude initiale a_0 et le taux de croissance γ sont unitaires. $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ sont discrétisés sur une grille de $n_p \times N$ points. Pour la suite de l'étude, les dimensions sont fixées à $n_p = 200$ et $N = 100$. L'écoulement est supposé périodique (pas de croissance temporelle : $\sigma = 0$).

Lorsque $\epsilon = 0$, l'algorithme DMD n'a besoin que de 3 réalisations du champs pour identifier correctement la fréquence. En pratique, le rang de la matrice de données K_1^N est dégénéré et vaut 2. La NU-DMD est également capable d'identifier les fréquences, avec une précision meilleure que 10^{-4} (voir figure 1.8), quelque soit le nombre de pas de temps N utilisé.

Lorsque le bruit n'est plus nul $\epsilon \neq 0$, alors la matrice des données est de rang plein. La DMD ne peut plus converger avec seulement trois réalisations. La NU-DMD donne alors d'excellents résultats, en terme de précision de la fréquence identifiée. Dans le tableau 1.1 sont présentées les fréquences identifiées respectivement par la DMD et la NU-DMD, en fonction de plusieurs valeurs de bruit ϵ . L'algorithme DMD utilise les N premiers vecteurs

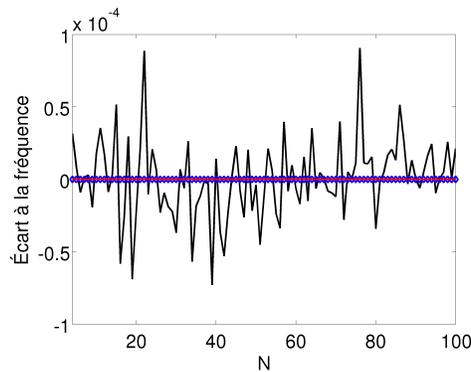


Figure 1.8 – Identification de la fréquence lorsque le bruit ϵ est nul, en fonction du nombre \tilde{N} de réalisations utilisées. La ligne rouge, représente la fréquence identifiée par DMD, la noire par NU-DMD. Les losanges bleus représentent la fréquence théorique.

de la base de données, quand la DMD non-uniforme utilise \tilde{N} vecteurs pris *au hasard* dans la base de données de \tilde{N} réalisations. La fréquence est plus précisément identifiée dans la quasi-totalité des cas, y compris avec un bruit important et pour un nombre très faible de réalisations \tilde{N} conservées.

Tableau 1.1 – Précision de l'identification de la fréquence dominante de l'écoulement en fonction de \tilde{N} , le nombre de champs utilisé en fonction du bruit ϵ (en pourcentage du ratio signal sur bruit).

| Bruit ϵ | 0.001 | | 0.010 | | 0.100 | | 0.150 | |
|-------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | DMD | NU-DMD | DMD | NU-DMD | DMD | NU-DMD | DMD | NU-DMD |
| $\tilde{N} = 5$ | 3.1812 | 3.1831 | 3.1876 | 3.1839 | 3.4192 | 3.1811 | 3.0082 | 3.1802 |
| $\tilde{N} = 10$ | 3.1833 | 3.1834 | 3.1828 | 3.1833 | 3.1469 | 3.1891 | 3.1936 | 3.1862 |
| $\tilde{N} = 15$ | 3.1829 | 3.1832 | 3.1831 | 3.1835 | 3.1702 | 3.1786 | 3.2029 | 3.1810 |
| $\tilde{N} = 20$ | 3.1832 | 3.1831 | 3.1838 | 3.1833 | 3.1926 | 3.1822 | 3.1763 | 3.1839 |
| $\tilde{N} = 30$ | 3.1831 | 3.1831 | 3.1822 | 3.1831 | 3.1783 | 3.1838 | 3.1857 | 3.1819 |
| $\tilde{N} = 50$ | 3.1831 | 3.1831 | 3.1843 | 3.1829 | 3.1875 | 3.1808 | 3.1912 | 3.1840 |
| $\tilde{N} = 100$ | 3.1831 | 3.1832 | 3.1829 | 3.1833 | 3.1834 | 3.1797 | 3.1810 | 3.1810 |

1.6.3 Qualification de l'éco-DMD

L'écoulement synthétique précédent est repris. La pulsation ω est fixée à 20, soit une fréquence $f_{vrai} = \omega/2\pi = 3.1831\dots$. Le nombre d'onde k , l'amplitude initiale a_0 et le taux de croissance γ sont unitaires. $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ sont discrétisés sur une grille de $n_p \times N$ points. Pour la suite de l'étude, les dimensions sont fixées à $n_p = 10000$ et $N = 50$. L'écoulement est supposée périodique (pas de croissance temporelle : $\sigma = 0$).

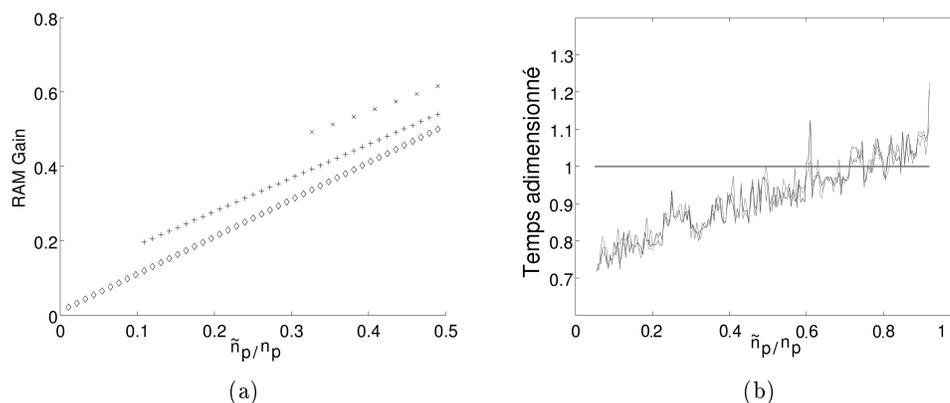


Figure 1.9 – Économies réalisées par l'éco-DMD. (a) : Utilisation mémoire, en fonction du nombre d'observables \tilde{n}_p . L'influence du nombre de réalisations conservées est également reporté sur le graphique. Les losanges sont pour $\tilde{N}/N = 0.03$, les plus pour $\tilde{N}/N = 0.3$ et les croix pour $\tilde{N}/N = 1$ (b) : temps nécessaire pour le calcul. La ligne horizontale représente le temps pour une DMD standard.

1.6.3.1 Complexité algorithmique

Comme précisé dans la section 1.4.3.3, la complexité algorithmique de la décomposition en modes dynamiques dépend des deux paramètres, la dimension d'espace n_p et le nombre de réalisations N . Par conséquent, les économies attendues (en RAM comme en flops) dépendent de deux taux de dégradations, temporelle et spatiale.

Les gains de complexité algorithmique sont linéaires avec le paramètre $\alpha = \tilde{n}_p/n_p$, qui correspond au taux de dégradation spatiale. La figure 1.9 illustre ce gain. Lorsque l'on fixe N , la pente associée δ_α du gain est excellent, avec $\delta_\alpha = 0.90 \pm 0.09$. Le taux α reste plus grand, dans notre exemple, que 10^{-2} , mais, dans le cas de données issus de simulations numériques, α peut typiquement décroître à 10^{-6} , ce qui amènerait *de facto* un gain de quasiment six ordre de grandeurs en RAM.

La complexité algorithmique (*cf.* section 1.4.3.3) dépend en théorie quadratiquement du paramètre $\beta = \tilde{N}/N$. Néanmoins, sur la figure 1.9(a), l'écart entre les courbes d'occupation en RAM de l'algorithme en fonction des paramètres α et β , est faible. Lorsque n_p est fixé, le coefficient de gain quadratique est seulement $\delta_\beta = 3.0 \cdot 10^{-2} \pm 7.1 \cdot 10^{-3}$, ce qui rend peu utile une telle dégradation.

Sauf dans le cas d'une dégradation spatiale conséquente, l'éco-DMD n'est pas très efficace en terme de gain de temps (*cf.* figure 1.9(b)). Le gain associé est faible, dès lors que l'on recalcule tous les modes. Le gain peut cependant être très substantiel si l'on n'identifie pas tous les modes mais seulement les modes significatifs. Ce gain, issu du calcul matriciel, est alors directement dépendant du nombre de modes choisis, avec un préfacteur proche de l'unité. Néanmoins, l'objectif principal (économie en RAM) est atteint. Le coefficient de gain est très significatif ($\delta_\alpha \approx 0.9$) : le gain total en RAM est quasiment égal au taux de dégradation spatial α , ce qui signifie que diminuer d'un ordre de grandeur la dimension spatiale fait économiser d'un ordre de grandeur l'occupation en mémoire.

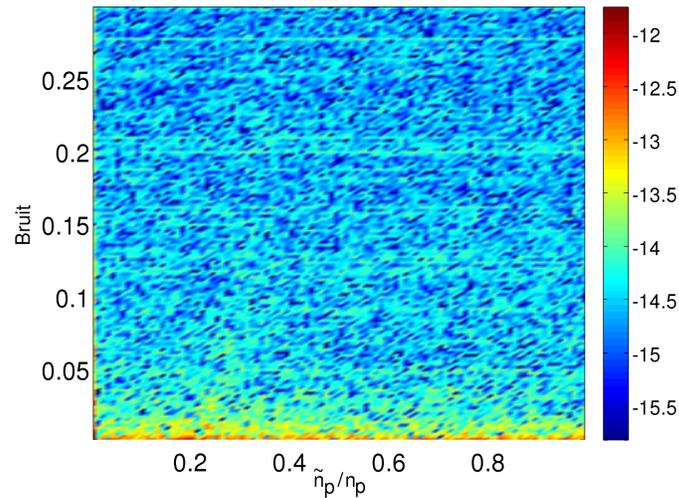


Figure 1.10 – Erreurs (\log_{10}) sur l'identification de la fréquence, en fonction du taux de dégradation spatiale \tilde{n}_p/n_p , et du bruit.

La stratégie de décimation est importante. Chercher des "bons" points à conserver, tels que leurs séries temporelles contiennent toute l'information sur la dynamique permet de diminuer le nombre de points \tilde{n}_p à conserver. De même, dans le cas de fréquences élevées, le choix de points représentatif de ces fréquences permet alors de diminuer le nombre de réalisations \tilde{N} nécessaire à l'identification. Cette question de sélection des points est traitée section 1.5 sous la forme d'une analyse des propriétés d'observabilité.

1.6.3.2 Précision de l'identification fréquentielle

Sur la figure 1.10, le bruit ϵ varie entre 0 et 30% du signal. Il est intéressant de noter que la méthode est d'autant plus efficace qu'un peu de bruit est présent dans les données. Néanmoins, même sans bruit, l'imprécision relative quand à l'identification de la fréquence reste nettement sous les 10^{-10} . La dégradation spatiale ne semble pas avoir d'influence dans cet exemple.

1.6.4 Qualification de la DMD-Observabilité

Une autre méthode pour quantifier les qualités d'observabilité d'une observable, ne nécessitant pas les équations du système dynamique, a été proposée par Aguirre & Letellier [1]. L'attracteur reconstruit à partir d'une bonne observable, lorsque l'on plonge sa série temporelle dans le bon espace de plongement, doit être complètement déployé. Dans le cas contraire, l'attracteur reconstruit est plissé, et des orbites, dans l'espace des phases reconstruit, se croisent. Le déterminisme est donc perdu. Partant de ce constat, Aguirre & Letellier propose une méthode, la Singular Value Decomposition Observability (SVDO), d'estimation du déploiement de l'attracteur reconstruit, et donc de quantifier les propriétés d'observabilité de l'observable.

Cette méthode utilise des matrices des trajectoires X . X est la matrice de plongement

par retard, dans un espace de dimension m_e , de séries temporelles de m_h éléments. Si la série est extraite de la composante k de l'observable $\mathbf{u}_{i \in \{1, \dots, N\}}$, et commence au temps j , alors la matrice des trajectoires est :

$$X(k, j) = \begin{pmatrix} u_j^k & u_{j+1}^k & \dots & u_{j+m_e}^k \\ u_{j+1}^k & u_{j+2}^k & \dots & u_{j+m_e+1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{j+m_h}^k & u_{j+m_h+1}^k & \dots & u_{j+m_e+m_h}^k \end{pmatrix}.$$

La série temporelle définit donc un point précis \mathbf{x} de l'espace des phases reconstruits (c'est-à-dire l'espace de plongement), et la matrice des trajectoires est associée à ce point $\mathbf{x} \equiv \{u_j^k, \dots, u_{j+m_e}^k\}$.

Pour une géométrie complètement dépliée, les trajectoires (les lignes de $X(k, j)$) proches restent dans la même région de l'attracteur. Il en résulte que la première valeur singulière λ_j^k de la matrice des trajectoires $X(k, j)$ sera prépondérante, et le ratio $\bar{\lambda}_j^k$ entre λ_j^k et la somme des valeurs singulières de la matrice $X(k, j)$ est proche de 1. Dans le cas d'une géométrie mal dépliée, les trajectoires peuvent être très différentes. Les autres valeurs singulières prendront de l'importance, et le ratio $\bar{\lambda}_j^k$ sera moins important.

Une statistique $\sigma_{\text{svd}}(k)$ est construite, en recherchant les matrices des trajectoires correspondant à des points voisins de l'espace des phases reconstruit, et en calculant les quantités $\bar{\lambda}_i^k$ associées :

$$\sigma_{\text{svd}}(k) = \frac{\text{mean}(\bar{\lambda}_i^k)}{\text{std}(\bar{\lambda}_i^k)}, \quad (1.109)$$

std est la déviation standard.

Pour une géométrie dépliée, la moyenne sera proche de 1, tandis que la déviation standard sera faible. Dans le cas contraire d'une géométrie plissée, alors les trajectoires peuvent être complètement différentes, parcourant des régions totalement différentes de l'attracteur reconstruit, d'une matrice à l'autre. La valeur moyenne des $\bar{\lambda}_i^k$ sera donc plus faible, alors que la déviation standard sera plus élevée.

Par conséquent, la statistique σ_{svd} est un indicateur de la géométrie de l'attracteur reconstruit, et donc des propriétés d'observabilité de la série temporelle, c'est-à-dire de l'observable sélectionnée.

Une matrice des trajectoires $X(k, j)$ correspond à un point donné de l'espace de plongement $\mathbf{x} \equiv \{u_j^k, \dots, u_{j+m_e}^k\}$. Pour savoir si deux matrices $X(k, j)$ et $X(k, i)$ correspondent à des points dans le même voisinage, il suffit donc de vérifier si la série temporelle $\{u_i^k, \dots, u_{i+m_e}^k\}$ est proche de la série temporelle de référence $\{u_j^k, \dots, u_{j+m_e}^k\}$, avec $i \neq j$. C'est-à-dire, pour un ϵ choisi, si :

$$\left\| \{u_i^k, \dots, u_{i+m_e}^k\} - \{u_j^k, \dots, u_{j+m_e}^k\} \right\|_2 < \epsilon. \quad (1.110)$$

La SVDO et la DMDO sont comparés dans le tableau 1.2 pour quelques systèmes dynamiques dont l'observabilité est connue. Les composantes des systèmes sont classées selon l'estimation de leur qualité d'observable, selon la DMDO et la SVDO. Les détails concernant les systèmes dynamiques peuvent être trouvés dans les travaux d'Aguirre et

Letellier [1]. La DMD-Observabilité peut paraître limité pour l'étude de systèmes dynamiques (chaotiques et non linéaires) de faible dimension. La méthode repose sur la construction de l'opérateur d'évolution par DMD, qui est donc construit sur seulement deux réalisations dans le cas de système à trois dimensions. Afin de capter les propriétés d'observabilité, la DMDO a été appliquée sur de nombreuses réalisations, issues de conditions initiales déterminées aléatoirement par lancers de Monte Carlo, afin de pouvoir décrire statistiquement la qualité d'observabilité dès lors qu'une partie conséquente de l'espace des paramètres (l'attracteur du système, dans le cas présent) a été sondée. Ainsi, l'écart type du tableau, pour la DMDO, est calculé sur les fluctuations de la moyenne en fonction du nombre de lancers de Monte Carlo. L'équation (1.101) nous montre que σ_α ne prend que quatre valeurs dans les systèmes de dimensions 3, calculer un écart-type sur la valeur de σ_α ne donne donc pas une information pertinente.

Néanmoins, les résultats sont en bon accord avec la théorie, avec seulement une inversion dans le classement des observables, pour le système de Lorenz. Il est à noter que cette inversion est sur une composante très délicate à estimer, comme on peut le voir en considérant l'écart-type de la SVDO. Malgré tout, la meilleure observable reste nettement mise en avant. La DMDO capte particulièrement bien le fait que les composantes y et z n'ont pas de différences significatives en terme d'observabilité dans le système Lorenz'84, qui possède un attracteur particulièrement complexe [114, 1].

Tableau 1.2 – Comparaison pour différents systèmes dynamique entre la SVDO (valeurs tirées de [1]) et la DMDO. Les calculs pour la DMDO ont été réalisés sur 10000 lancers de Monte Carlo, pour un paramètre $\alpha = 0.9$. L'écart type est calculé par rapport à la fluctuation de la moyenne.

| Système | Ordre d'observabilité | Composante | SVDO $\equiv \sigma_{\text{svd}}$ | DMDO $\equiv \sigma_\alpha$ |
|-----------|---------------------------------------|------------|-----------------------------------|-----------------------------|
| Rössler | $y \triangleright x \triangleright z$ | y | 0.29 ± 0.02 | 0.79 ± 0.02 |
| | | x | 0.25 ± 0.03 | 0.77 ± 0.01 |
| | | z | 0.07 ± 0.002 | 0.09 ± 0.01 |
| Lorenz | $z \triangleright x \triangleright y$ | z | 2.23 ± 0.13 | 0.96 ± 0.01 |
| | | x | 0.96 ± 0.38 | 0.09 ± 0.00 |
| | | y | 0.43 ± 0.09 | 0.22 ± 0.01 |
| Lorenz'84 | $x \triangleright y \approx z$ | x | 0.44 ± 0.03 | 0.85 ± 0.01 |
| | | y | 0.25 ± 0.02 | 0.76 ± 0.01 |
| | | z | 0.18 ± 0.02 | 0.76 ± 0.01 |

Chapitre 2

Identification de Structures Cohérentes Lagrangiennes

2.1 Un point de vue lagrangien

Soit $\mathbf{x}(t)$ la position d'une particule fluide. Son évolution, dans un champ de vitesse \mathbf{u} , s'écrit sous la forme générale d'un système dynamique :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t), \quad (2.1)$$

où \mathbf{f} correspond au champ de vitesse \mathbf{u} . Ce système évolue sur une variété \mathcal{D} de dimension $n_{\mathcal{D}}$, donc la position $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ équivaut au vecteur d'état du système. En pratique, $n_{\mathcal{D}}$ est de dimension 2 ou 3, et le champ de vitesse \mathbf{u} est obtenu par mesures expérimentales (vélocimétrie par images de particules) ou par simulations numériques. Dans le cas d'un écoulement bi-dimensionnel, *i.e.* $\mathbf{x} = (x, y)$, incompressible (*i.e.* si le système dynamique associé est conservatif) alors la vitesse peut s'écrire :

$$\mathbf{u} \equiv (u(x, y, t), v(x, y, t)) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y, t), -\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y, t) \right) \quad (2.2)$$

où Ψ est la fonction courant. L'équation résultante (2.2) peut être exprimée sous une forme canonique de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y, t) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y, t) \end{cases} \quad (2.3)$$

où la fonction courant Ψ tient lieu de hamiltonien. Il en résulte deux propriétés :

- i) Premièrement, dès que le système est de dimension 3, ou de dimension 2 *et* stationnaire, l'advection chaotique peut jouer un rôle majeur dans le mélange, et, plus généralement, dans la dynamique globale de l'écoulement (voir par exemple les travaux expérimentaux de Deese *et al.* [31] ou théoriques de Beigie *et al.* [9], Camassa *et al.* [22], Rom-Kedar *et al.* [149] ou encore l'ouvrage de référence d'Ottino [132]).

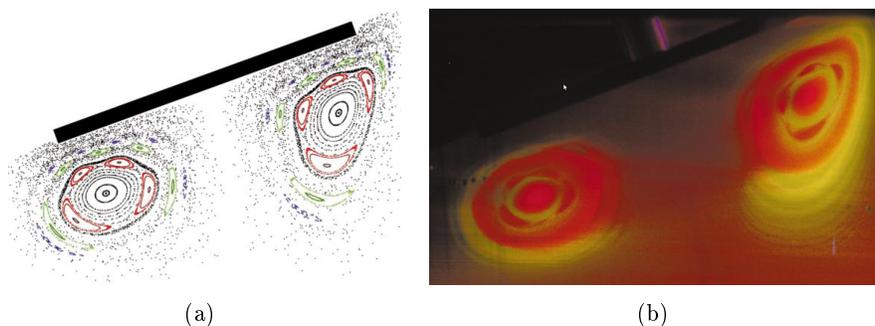


Figure 2.1 – Comparaisons de Poincaré numérique (a) et expérimentale (b). D’après Fountain *et al.* [49].

- ii) D’autre part, les outils de la théorie des systèmes dynamiques peuvent être adaptés pour l’étude des propriétés d’écoulements fluides. Dans les années 80, les efforts ont principalement portés, avec quelques succès, sur la transition vers la turbulence envisagée sous l’angle de la théorie des systèmes dynamiques. Durant les vingt dernières années, ce champ applicatif s’est réorienté vers l’étude du mélange et des propriétés dynamiques de l’écoulement (voir par exemple [9]) suivie de spectaculaires réalisations expérimentales, avec la mise en évidence de tores KAM [103], de structures en fer à cheval caractéristiques du chaos, ou encore la correspondance entre sections de Poincaré expérimentales et théoriques [125, 49] (*cf.* figure 2.1).

Lorsque l’espace est de dimension deux, les variétés stables et instables du système, issues des points fixes, déterminent complètement l’évolution et les trajectoires de particules fluides dans l’écoulement, comme illustré en figure 2.2.

Il est à noter que la généralisation des concepts en dimension trois et plus n’est pas encore établie [5] et est en cours d’étude dans la communauté. Néanmoins, l’étude numérique des ensembles invariants, initiée par Rom-Kedar [148], Camassa & Wiggins [22], Beigie *et al.* [10] a permis une meilleure compréhension des dynamiques de transport et de mélange. Les liens entre le mélange, la théorie des systèmes dynamiques et la dynamique ergodique, principalement portée par Mezic [126, 137, 125], Wiggins [126, 120] et Malhotra [120, 119], et la recherche d’ensembles invariants ont conduit à l’étude de l’opérateur de Perron-Frobenius. La généralisation de la notion d’ensembles invariants dans le cadre de dynamiques apériodiques, proposées par Haller [73, 70], sous forme d’ensembles quasi-invariants à temps fini, est présentée plus en détail dans les parties suivantes.

2.2 Le mélange lagrangien

2.2.1 Dynamiques des lobes

Considérons une variété stable et une variété instable de deux points fixes, reliés par une orbite hétérocline, de l’équation (2.1) supposée périodique. Le croisement transverse forme des variétés, près des points fixes, un enchevêtrement hétérocline, illustré figure 2.3. Les circonvolutions des variétés forment des lobes. Ainsi délimités par des variétés invariantes, *i.e.* des séparatrices matérielles de l’écoulement, les lobes forment des

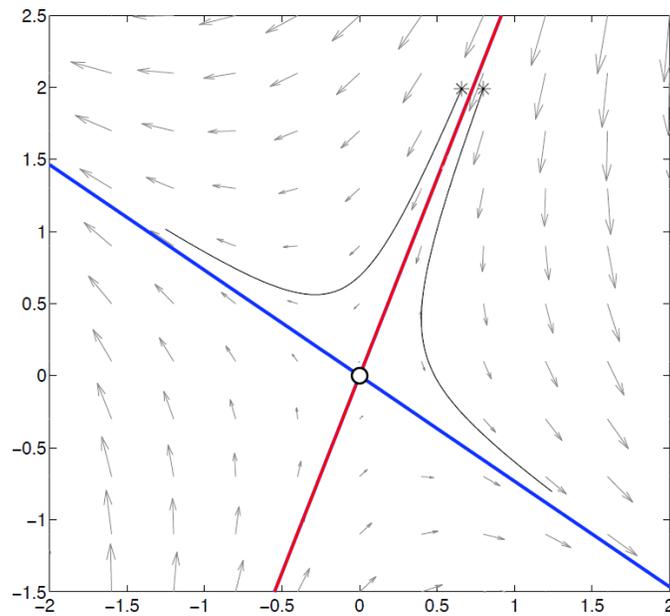


Figure 2.2 – Illustration des trajectoires (droites grises, le point de départ étant les étoiles) près d’un point selle (cercle noir). Les variétés (stable en bleu, instable en rouge) contraignent les trajectoires. Le champ vectoriel f est spatialement représenté par le champ de flèches.

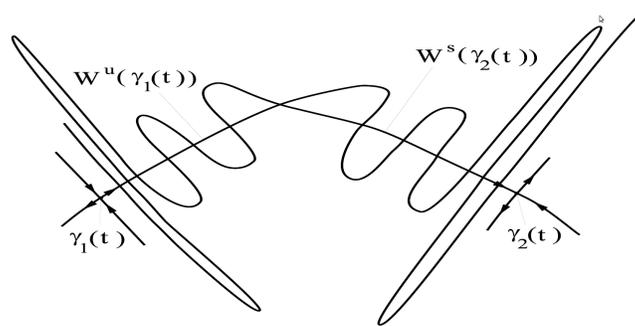


Figure 2.3 – Enchevêtrement de variétés le long d’une trajectoire hétérocline, résultant de l’intersection de deux variétés stable $W^s(\gamma_2)$ et instable $W^u(\gamma_1)$ issues des points fixes hyperboliques γ_1 et γ_2 . Deux intersection successives définissent, *de facto* un lobe, entre la variété instable $W^u(\gamma_1)$ et $W^s(\gamma_2)$. Figure extraite de Malhotra *et al.* [120]

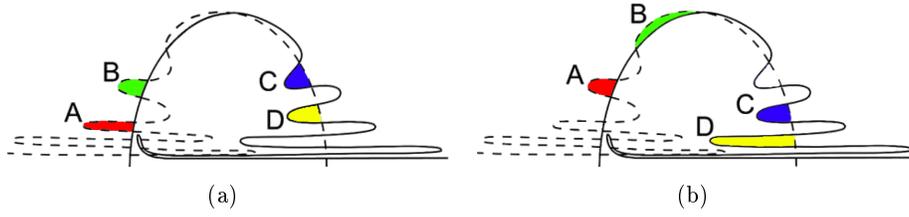


Figure 2.4 – Illustration du transports par des lobes : le fluide prisonnier dans des lobes en (a) se retrouve, à la période suivante, décalé d'un lobe en (b).

poches de fluide ne communiquant pas avec le reste de l'écoulement. Suivre la dynamique des lobes permet d'avoir une représentation de la façon dont s'organise le mélange au sein de l'écoulement. La dynamique est simple à se représenter. Les variétés étant des frontières matérielles, la seule possibilité pour une particule fluide de se déplacer, d'une période à une autre, est de suivre l'évolution d'un lobe. Rom-Kedar *et al.* [149, 148] ont montré qu'un lobe à une période donnée est transporté par l'application de premier retour sur le lobe suivant, à la période suivante. Lorsqu'il est suivi dans la section de Poincaré, le fluide pris au piège dans un lobe "passe" donc d'un lobe au suivant. Ce phénomène est illustré sur la figure 2.4(b). Le transport et le mélange peuvent donc être quantifiés par l'analyse des lobes formés. La difficulté de cette méthode réside dans l'identification des variétés stables et instables, et dans sa généralisation aux régimes aperiodiques et aux dimensions d'espace supérieures à deux.

2.2.2 Ensembles quasi-invariants

Lord Reynolds a utilisé de l'encre pour visualiser la turbulence dans ses célèbres expériences. Suivre une densité a ainsi été une des premières approches utilisée en mécanique des fluides pour comprendre la dynamique d'un écoulement. De nombreuses et fructueuses expériences, concernant par exemple le mélange lagrangien, ont été réalisées par ensemencement de l'écoulement.

Une famille d'opérateurs, les opérateurs de Markov, s'applique spécifiquement aux densités (*i.e.* la classe de fonctions représentant notamment la notion de goutte d'encre dans un volume). Soit le flot dynamique ϕ_0^t associé au système dynamique de l'équation (2.1), qui transporte le vecteur d'état \mathbf{x} du temps 0 au temps t :

$$\phi_0^t(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{x}(t) \quad (2.4)$$

En particulier, l'opérateur de Frobenius-Perron \mathcal{P}_0^t est un opérateur transportant une densité du temps 0 au temps t , sous l'action du flot dynamique. En notant μ la mesure de Lebesgue sur le pavé \mathcal{D} , et g une densité de \mathcal{D} dans \mathbb{R}^+ , l'opérateur de Frobenius-Perron est défini par la relation intégrale :

$$\int_{\mathcal{E}} \mathcal{P}_0^t g d\mu = \int_{\phi_0^{-t}(\mathcal{E})} g d\mu. \quad (2.5)$$

L'opérateur est défini de façon unique et l'équation est vraie pour tout ensemble $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ mesurable au sens de μ . Cet opérateur permet de décrire l'évolution d'un ensemble

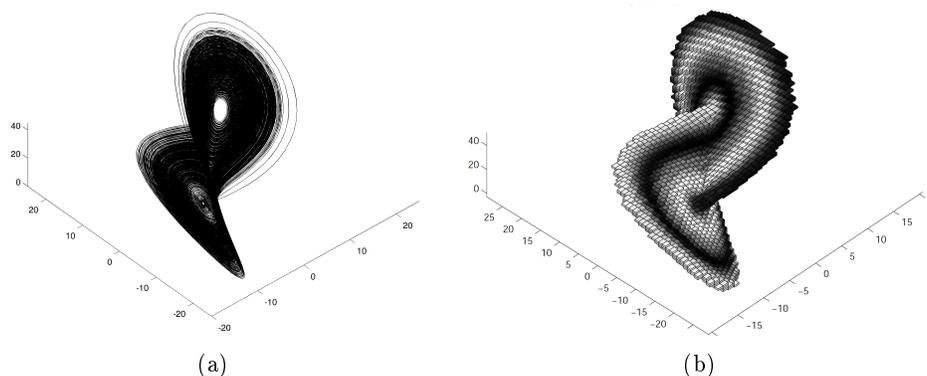


Figure 2.5 – (a) : Attracteur de Lorenz. (b) : Ensemble invariant du système de Lorenz, issu de Froyland & Dellnitz [53].

sous l'effet de l'écoulement. Pour s'en convaincre, considérons un ensemble \mathcal{G} , *e.g.* le volume pris par une goutte d'encre dans l'écoulement. Cet ensemble est transporté par l'écoulement, et devient l'ensemble $\mathcal{E} \equiv \phi_0^t(\mathcal{G})$. La goutte d'encre peut être représentée par une fonction densité g . L'équation (2.5) devient $\int_{\mathcal{E}} \mathcal{P}_0^t g d\mu = \int_{\mathcal{G}} g d\mu$. $\mathcal{P}_0^t g$ est donc la densité associée au volume \mathcal{G} , *i.e.* représentant le volume occupé par la goutte, une fois transportée par l'écoulement. L'étude de l'opérateur de Frobenius-Perron permet donc d'identifier comment est transportée la goutte par l'écoulement.

Dellnitz *et al.* [33, 32] ont proposé d'approximer, en le discrétisant, l'opérateur de Frobenius-Perron \mathcal{P}_0^t , pour des systèmes de petites dimensions (*e.g.* le système de Lorenz) afin d'identifier les densités invariantes g^i par le flot :

$$\mathcal{P}_0^t g^i = g^i. \quad (2.6)$$

Soit $\mathcal{E}^i \subset \mathcal{D}$ le support d'une telle densité g^i , alors cet ensemble est invariant par le flot :

$$\phi_0^t(\mathcal{E}^i) = \mathcal{E}^i. \quad (2.7)$$

Les variétés stables et instables ne sont qu'une famille de ces ensembles, qui identifient et séparent l'espace des phases en régions dynamiquement pertinentes. Par exemple, un attracteur du système correspond évidemment à un de ces ensembles invariants (voir, la figure 2.5 illustrant l'ensemble invariant correspondant à l'attracteur, pour le système de Lorenz).

Cette méthode a été généralisée aux systèmes de grandes dimensions, notamment pour la mécanique des fluides, par Froyland [51, 52, 54], pour étudier en particulier le mélange et les frontières que forment ces ensembles invariants. Récemment, Tallapragada *et al.* [170] ont proposé une définition des exposants de Lyapunov à temps fini basée sur l'opérateur de Frobenius Perron.

2.3 Structures Cohérentes Lagrangiennes

2.3.1 Champ d'Exposants de Lyapunov à Temps Fini

Les ensembles invariants divisent l'écoulement en domaines dont les particules ont des évolutions différentes en espace et en temps. Il est depuis longtemps connu que ces structures sont au coeur du mélange [22, 138] et des propriétés dynamiques du système [37, 71]. Dans le cadre des systèmes hamiltoniens, un ensemble invariant, dès qu'il est issu d'une variété (stable ou instable) du système, possède par définition, des propriétés hyperboliques fortes (voir par exemple, Malhotra & Wiggins [120] ou Hasselblatt & Katok [4]).

Miller *et al.* [127] ont utilisé, en 1997, les propriétés hyperboliques d'un champ de vitesse périodique, à travers sa fonction courant, pour identifier les variétés stables et instables de l'écoulement, afin d'étudier la dynamique des lobes. De là, Haller a formalisé, dès l'année suivante [73] l'identification et l'existence de structures hyperboliques, par l'étude du champ de vitesse d'un système à deux dimensions, dès lors qu'un point de stagnation est présent. La contrainte bi-dimensionnelle a été ensuite levée par Haller lui-même [70, 71], puis généralisé par Lekien *et al.* [108] à des systèmes de dimensions quelconques. La méthode initialement proposée par Haller est reprise intensément dans la littérature [162, 110]. L'identification des variétés repose sur le calcul de l'exposant de Lyapunov à Temps Fini (FTLE). Ce champ scalaire $\sigma_{t_0}^T(\mathbf{x})$ mesure la divergence matérielle, *i.e.* la façon dont les trajectoires, du temps t_0 au temps $t_0 + T$, proche du point \mathbf{x} , vont s'écarter les unes par rapport aux autres, après un temps horizon T arbitraire. La figure 2.6 représente une sphère de conditions initiales autour d'un point \mathbf{x}_0 . Ce point est le croisement entre une variété stable (en bleu), et une variété instable (en rouge). Après un temps T , l'ensemble de conditions initiales reste globalement centré sur $\Phi_0^T(\mathbf{x}_0)$, qui représente la position de la particule initialement en \mathbf{x}_0 . La sphère est néanmoins fortement déformée par l'influence des variétés. Les points proches de la variété instable (tirets rouges) s'éloignent du centre \mathbf{x}_0 tandis que les points proches (tirets bleus) de la variété stable s'en rapprochent.

Formalisons cette approche. Une trajectoire démarrant au point \mathbf{x}_0 au temps t_0 , $\mathbf{x}(t, (\mathbf{x}_0, t_0))$, appartenant au compact \mathcal{D} inclus dans \mathbb{R}^n (en pratique, $n \in \{2, 3\}$), est solution du système dynamique défini par le champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t, (\mathbf{x}_0, t_0)) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t, (\mathbf{x}_0, t_0)), t). \quad (2.8)$$

Le champ de vitesse sera par la suite au moins \mathcal{C}^0 en temps et \mathcal{C}^2 en espace. La solution peut être exprimée grâce au flot $\Phi_{t_0}^t$:

$$\begin{aligned} \Phi_{t_0}^t : \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D} \\ \mathbf{x}_0 &\mapsto \mathbf{x}(t, (\mathbf{x}_0, t_0)). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Par la suite, pour lever toute ambiguïté avec l'écoulement considéré, le flot Φ sera nommé flot dynamique. Une particule fluide est donc advectée par le flot dynamique, de sa position initiale \mathbf{x}_0 au temps t_0 jusqu'à sa position finale \mathbf{x} au temps $t_0 + t$:

$$\Phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{u}(\mathbf{x}(\tau, (\mathbf{x}_0, t_0))) d\tau. \quad (2.10)$$

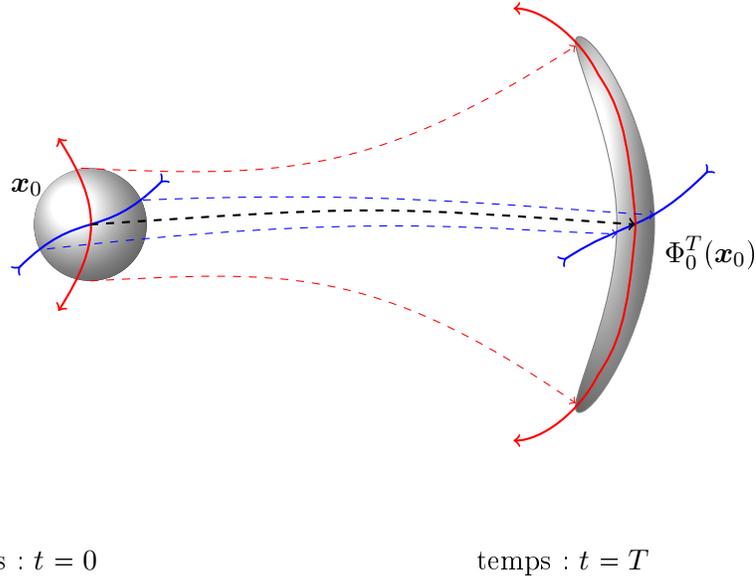


Figure 2.6 – Évolution d’une particule fluide sous l’action du flot Φ_0^T – Les traits pointillés bleus (respectivement rouges) représentent des trajectoires de points appartenant à la variété stable (respectivement instable). Les traits pointillés noirs représentent la trajectoire du point initialement à la position \mathbf{x}_0 . Les trajectoires rouges s’écartent, tandis que les trajectoires bleues se rapprochent.

L’écart entre des trajectoires initialement proches peut naturellement être évalué au travers du gradient du flot dynamique $\frac{d\Phi_{t_0}^t}{d\mathbf{x}}$. Cet opérateur décrit l’évolution d’un écart (infinitésimal) à la position initiale \mathbf{x}_0 et la déviation de sa position finale de la particule par rapport à $\Phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)$. Ce gradient permet donc de décrire la divergence matérielle.

Pour calculer cette divergence, considérons une perturbation autour du point \mathbf{x}_0 :

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0(t_0). \quad (2.11)$$

Alors, l’écart évolue et, au temps t :

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x}_0(t) &= \Phi_{t_0}^t(\mathbf{x}) - \Phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) \\ &= \frac{d\Phi_{t_0}^t(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}\delta\mathbf{x}_0(t_0) + \mathcal{O}\left(\|\delta\mathbf{x}_0(t_0)\|_2^2\right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Au premier ordre, l’écart au temps t s’écrit :

$$\begin{aligned} \|\delta\mathbf{x}_0(t)\|_2 &= \sqrt{\left\langle \frac{d\Phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}}\delta\mathbf{x}_0(t_0), \frac{d\Phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}}\delta\mathbf{x}_0(t_0) \right\rangle} \\ &= \sqrt{\left\langle \delta\mathbf{x}_0(t_0), \frac{d\Phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}} \frac{d\Phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}} \delta\mathbf{x}_0(t_0) \right\rangle} \\ &= \sqrt{\langle \delta\mathbf{x}_0(t_0), \Delta_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) \delta\mathbf{x}_0(t_0) \rangle} \end{aligned} \quad (2.13)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire dans \mathbb{R}^n , la notation $*^\dagger$ indique l'adjoint de $*$ et $\Delta_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)$ représente l'opérateur symétrique $\frac{d\Phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)^\dagger}{d\mathbf{x}} \frac{d\Phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}}$, calculé à partir de la Jacobienne du flot dynamique. Le lecteur pourra reconnaître le tenseur des déformation de Cauchy-Green.

Maximiser l'évolution de la perturbation à l'horizon T revient à aligner le vecteur écart $\delta\mathbf{x}_0(t_0)$ et le vecteur propre du tenseur correspondant à la plus grande valeur propre λ du tenseur de Cauchy-Green.

$$\max_{\delta\mathbf{x}_0(t_0)} \|\delta\mathbf{x}_0(T)\|_2 = \sqrt{|\lambda|} \|\delta_{\max}\mathbf{x}_0(t_0)\|_2 \quad (2.14)$$

ce qui peut être réécrit :

$$\max_{\delta\mathbf{x}_0(t_0)} \|\delta\mathbf{x}_0(T)\|_2 = e^{\sigma_{t_0}^T(\mathbf{x}_0)|T|} \|\delta_{\max}\mathbf{x}_0(t_0)\|_2 \quad (2.15)$$

en notant $\sigma_{t_0}^T(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{|T|} \ln \sqrt{|\lambda|}$.

Par construction, le champ scalaire $\sigma_{t_0}^T(\mathbf{x}_0)$, $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$ donne une mesure locale de la divergence matérielle. Un $|\lambda|$ plus petit que 1 dans (2.14), ou, de manière équivalente, une partie réelle de $\sigma(\mathbf{x}_0)$ négative indique que la déviation va décroître. Au contraire, si $|\lambda|$ est plus grand que 1 ou si la partie réelle de $\sigma(\mathbf{x}_0)$ est positive, alors l'écart va croître. La quantité $\sigma_{t_0}^T$ est appelé *Exposant de Lyapunov à Temps Fini* (FTLE) de l'écoulement, évalué au temps t_0 , et à la position \mathbf{x}_0 , pour le temps horizon T .

2.3.2 Définition et propriétés des Structures Cohérentes Lagrangiennes

Haller [70, 71, 72, 68] a démontré que les variétés invariantes d'un écoulement périodique ont comme répercussion la création d'extremum dans le champ d'exposant de Lyapunov. Par extension aux régimes apériodiques, les *Structures Cohérentes Lagrangiennes* (LCS) sont définies comme les crêtes du champ de FTLE [71, 162].

Comme le champ de FTLE est \mathcal{C}^2 en espace, les crêtes du champ sont mathématiquement bien définies. Les crêtes sont donc elles-mêmes \mathcal{C}^1 en espace. Par conséquent, les structures cohérentes lagrangiennes sont des sous-ensembles ouverts du domaine \mathcal{D} et sont donc bien des ensembles spatialement définis, *i.e.* des *structures* de la dynamique de l'écoulement.

Comme le champ de FTLE est \mathcal{C}^1 en temps, ses crêtes le sont également. Par conséquent, les LCS sont résilientes vis-à-vis du temps. Comme l'horizon T est défini pour être au moins de l'ordre de grandeur des temps caractéristiques du système dynamique, les LCS sont des structures *cohérentes*. Néanmoins, lorsque le temps évolue, les LCS peuvent disparaître. Ce sont des ensembles quasi-invariants à temps fini du flot dynamique *i.e.* des ensembles dont les temps de variation sont plus lents que les temps caractéristiques de l'écoulement. Tallapragada & Ross [170] ont, sur cette voie, récemment proposé de calculer des structures lagrangiennes par la recherche d'ensembles lentement variables.

Par construction, les flux de matière à travers les structures cohérentes lagrangiennes sont réduits [162], à l'exception notable de certaines crêtes du champ de FTLE issues

du cisaillement (voir par exemple [162, 110, 69]). Les structures cohérentes lagrangiennes peuvent donc être vues comme des frontières matérielles au sein de l'écoulement. Les LCS sont des séparatrices, isolant des poches de fluides ayant des dynamiques différentes. Shadden *et al.* [161] et Branicki & Wiggins [15] ont montré l'utilisabilité des structures cohérentes lagrangiennes pour quantifier le mélange par dynamique des lobes. Ces frontières sont *a priori* dépendantes du temps, et sont advectées par l'écoulement. Elles ont donc un comportement *lagrangien*.

L'horizon T peut être positif ou négatif. L'exploration d'un temps positif permet de révéler les variétés localement répulsives dans l'écoulement. En effet, selon l'équation (2.15), deux particules proches sont bien repoussées lorsque le champ de FTLE est localement maximal. Dans le cas contraire, lorsque le temps horizon T est rétrograde, on regarde des particules dont les trajectoires divergent dans un temps négatif, c'est-à-dire des particules qui convergent dans le temps positif. Les structures identifiées sont donc des variétés localement attractives dans l'écoulement.

La construction des structures cohérentes lagrangiennes se base sur les propriétés hyperboliques d'ensembles quasi-invariants. Lorsqu'un ensemble quasi-invariant est révélé par des propriétés hyperboliques, une implication forte a été démontrée par Bates *et al.* [8] : il *existe* dans son voisinage un ensemble invariant. Le corollaire immédiat est qu'il existe, dans le voisinage des LCS, un ensemble strictement invariant.

2.4 Algorithme

2.4.1 Précision de l'algorithme

Haller[71, 72] et Harrison *et al.* [76] ont montré que l'identification des LCS est robuste vis-à-vis du bruit dans les données et de la résolution spatiale du champ de vitesse. Ces résultats sont en accord avec le théorème de Bates *et al.* [8], qui démontre, de manière générale pour tout système dynamique, l'existence d'une variété invariante dans le voisinage d'une variété quasi-invariante et quasi-hyperbolique. Par conséquent, la précision numérique, quant aux calculs de trajectoires, ne sera pas en soit un objectif dans la suite des travaux présentés. Les algorithmes présentés ont été développés pour être utilisés sur des données expérimentales, intrinsèquement bruitées. De tels bruits sont *a priori* plus grands que les erreurs liées aux calculs numériques dès lors que les données sont spatialement et temporellement résolues. Dans la section 2.5.2, nous vérifierons que la qualité des résultats n'est effectivement pas dégradée.

2.4.2 Parallélisme induit par une implémentation Single Instruction Multiple Data

Appliquer une *même* opération à des données différentes est fréquent dans un algorithme. Lorsque cette opération peut se faire *simultanément* sur ces données, alors l'instruction est dite SIMD (Single Instruction Multiple Data). Depuis les années 90, les fabricants de processeurs ajoutent des extensions SIMD à leurs produits. Ces ajouts permettent d'utiliser des instructions SIMD et donc d'utiliser le parallélisme inhérent aux données stockées dans des tableaux de registres [178, 39]. Ces instructions permettent d'exploiter tous les étages des pipelines du processeur. Il en résulte une accélération

potentielle de l'algorithme de plusieurs ordres de grandeurs.

Un algorithme compatible avec une architecture SIMD possède deux atouts supplémentaires. La parallélisation est naturelle, et un portage GPGPU (calculs déportés sur la carte graphique) peut être facilement déployé, en utilisant par exemple CUDA [29, 122], OpenCL[35] ou des interfaces plus hauts niveaux tel que Thrust [42]. La méthode la plus directe permettant de rendre un algorithme compatible avec les instructions SIMD du processeur est de le vectoriser.

2.4.3 Vectorisation

Vectoriser une boucle consiste à traiter autant d'itérations de la boucle que possible à chaque cycle de processeur. Un exemple est montré équation (2.16b). Dans la plupart des situations, si un processeur a la capacité théorique de calculer plusieurs centaines d'itérations par cycle, une seule est en réalité réalisée, comme illustré par l'équation (2.16a). Des fonctions appelées non-vectorisées en sont la cause la plus usuelle. Lorsque les dépendances de la fonction ne dépendent que de l'itération courante, ces goulets d'étranglement du calcul sont facilement résolubles par une réimplémentation des fonctions.

Lorsqu'une itération dépend d'une autre itération de la boucle, elle n'est pas vectorisable, *cf.* équation (2.16c). Un autre point bloquant, fréquent en calcul numérique, est une condition d'arrêt dépendant du calcul en cours.

Boucle standard :

$$\begin{aligned} &\mathbf{for} \ i = 1 : N, \\ &\quad a[i] = a[i] + b[i]; \\ &\mathbf{end} \end{aligned} \tag{2.16a}$$

Boucle vectorisée :

$$\begin{aligned} &\mathbf{for} \ i = 1 : n_{vec} : N, \\ &\quad a[i : i + n_{vec}] = a[i : i + n_{vec}] + b[i : i + n_{vec}]; \\ &\mathbf{end} \end{aligned} \tag{2.16b}$$

Boucle non – vectorisable :

$$\begin{aligned} &\mathbf{for} \ i = 2 : N, \\ &\quad a[i] = a[i - 1] + b[i]; \\ &\mathbf{end} \end{aligned} \tag{2.16c}$$

2.4.4 Éviter les calculs redondants

Le calcul de séries de champs de FTLE est coûteux en temps et en puissance de calcul. Ce coût élevé s'explique en partie par la redondance des calculs lors de l'identification (nécessaire) de la Jacobienne du flot, en chaque point \mathbf{x}_0 du domaine \mathcal{D} et

pour tout temps t_0 . Il faut en pratique calculer un grand nombre de trajectoires proches pour l'estimation des dérivées spatiales du flot. Au premier ordre, pour un calcul de différences finies, quatre trajectoires sont nécessaires pour des données 2D, et neuf pour des données 3D. Plusieurs techniques existent déjà pour accélérer les calculs, comme des maillages adaptatifs [109] ou une simple parallélisation des calculs de trajectoires. Une amélioration significative a été proposée par Giest *et al.* [58] pour l'estimation de flot dynamique, et utilisée dans le cadre de la mécanique des fluides par Brunton & Rowley [18]. En pratique, si les pas d'espace $\delta \mathbf{x}$ et de temps δt sont suffisamment petits, les trajectoires $\mathbf{x}(t, (\mathbf{x}_0, t_0))$, $\mathbf{x}(t, (\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}, t_0))$ ou encore $\mathbf{x}(t + \delta t, (\mathbf{x}_0, t_0 + \delta t))$ s'écartent peu. Le champ de vitesse est au moins \mathcal{C}^0 en temps, et \mathcal{C}^2 en espace, il ne doit donc pas y avoir d'importantes différences, pour un horizon court, entre des trajectoires initialement proches. Une trajectoire est le transport, par le flot, du vecteur d'état. Cette relation intégrale (*cf.* équation (2.10)) se traduit par le fait que le flot vérifie une forme de relation de Chasles (*i.e.* le flot forme un semi-groupe) :

$$\phi_{t_0}^{t_2} = \phi_{t_1}^{t_2} \circ \phi_{t_0}^{t_1} \quad \forall (t_0, t_1, t_2) \in \mathbb{R}^3 \quad (2.17)$$

Supposons que le jeu de données soit composé de $N + 1$ champs de vitesse, pris à des temps $t_0 < t_1 < \dots < t_N$. Plutôt que de calculer les trajectoires à chaque temps, l'algorithme repose sur un calcul de flots élémentaires $\phi_{t_n}^{t_{n+1}}$, allant du temps t_n au temps t_{n+1} . Lorsque les flots élémentaires sont connus, n'importe quelle trajectoire peut être calculée par interpolation sur les flots élémentaires. Pour une particule étant à la position \mathbf{x}_0 au temps t_{start} , la trajectoire jusqu'à un temps $t \in [t_0, t_N]$ s'obtient par itération de l'équation (2.17) :

$$\mathbf{x}(t, (\mathbf{x}_0, t_{start})) = \phi_{t_{ke}}^t \circ \phi_{t_{ke-1}}^{t_{ke}} \circ \dots \circ \phi_{t_{ks}}^{t_{ks+1}} \circ \phi_{t_{start}}^{t_{ks}}(\mathbf{x}_0) \quad (2.18)$$

Les trajectoires sont donc calculées en suivant l'évolution du vecteur état. Cette idée amène à l'algorithme présenté en détail dans la section suivante 2.4.5.

2.4.5 Calculs de flots dynamiques élémentaires

Les algorithmes décrits dans les sections 2.3.1 et 2.4.4 ne permettent pas directement une vectorisation. Il faut pouvoir s'affranchir des dépendances spatiales et temporelles (*i.e.* un résultat précédent ne doit pas être nécessaire dans le calcul d'une itération de la boucle). C'est évidemment un problème insoluble lors d'une intégration temporelle, où la dépendance en temps est incontournable. Par conséquent, les dimensions spatiales, dont les calculs ne nécessitent pas de dépendance séquentielles, doivent être traités avant la dimension temporelle. La majorité des calculs est alors indépendante des indices temporels. La relation (2.18), proposé par Giest *et al.* [58], ou, plus récemment par Brunton & Rowley [18], permet en pratique, dès lors que le calcul repose sur l'identification séquentielle de flots élémentaires $\phi_{t_i}^{t_{i+1}}$, de traiter complètement les dimensions d'espace. L'algorithme résultant de cette remarque est :

1. Calculs des flots élémentaires
 - (a) démarrage au point $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$.
 - (b) calcul de la position de \mathbf{x}_0 dans le maillage.

- (c) recherche de $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)$ par interpolation, à partir des mailles où le champ \mathbf{u} est connu.
 - (d) calcul de $\mathbf{x}_1 \equiv \phi(\mathbf{x}_0)$ par intégration temporelle.
2. calcul des trajectoires par composition des flots élémentaires.
 3. calculs de la jacobienne du flot $\forall \mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$.
 4. calculs de l'exposant de Lyapunov à temps fini $\forall \mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$.

où $\overset{\circ}{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}$ représente le maillage.

L'algorithme est graphiquement présenté figure 2.4.5. Calculer le flot élémentaire entre t_0 et $t_0 + \Delta t$ revient à calculer l'évolution, pendant le pas de temps Δt , de toutes les conditions initiales $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Cela implique de résoudre l'équation (2.8), et donc d'estimer $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)$. Cette étape est un important goulet d'étranglement des performances dès que le point courant $\mathbf{x}(t)$ de la trajectoire ne correspond pas à un point de la grille $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Identifier cette position n'est pas une opération trivialement vectorisable. Afin de vectoriser la première boucle de l'algorithme (*i.e.* le calcul des flots élémentaires), les calculs d'estimation du champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)$, quelque soit le point \mathbf{x}_0 , doivent être identiques. Pour casser le goulet d'étranglement de l'interpolation de l'étape 1.c (*cf.* l'algorithme présenté figure 2.4.5), il faut donc pouvoir identifier les valeurs du champ de vitesse \mathbf{u} aux points de maille voisins du point \mathbf{x}_0 , sans qu'une référence spatiale explicite en \mathbf{x}_0 ne soit nécessaire.

Ce point soulève une autre question sur l'efficacité du calcul. Trouver les voisins requiert beaucoup d'informations (8 points dans le cas de données 2D, 16 points pour des données 3D, et ce pour une interpolation linéaire). Par conséquent, de nombreuses manipulations de données doivent être faites durant les calculs. Avoir un jeu de données coalescent dans la mémoire améliore l'efficacité du calcul. Un jeu de données coalescent est tel que, en mémoire, les données sont contiguës les unes aux autres. La vitesse d'accès aux données est alors considérablement améliorée, car toutes les données nécessaires pour le calcul sont *physiquement* proches. Toute l'information utile peut être alors chargée directement dans la mémoire cache (la plus rapide). Les défauts de cache capacitifs sont donc minimisés [63] (*i.e.* lorsque le processeur doit renouveler sa mémoire cache, ce qui arrive lorsque l'information dont il a besoin pour faire un calcul est manquante). Typiquement, le gain est d'un ordre de grandeur du temps de calcul (*cf.* figure 2.4.5).

Le premier prérequis est que la grille doit être une grille régulière cartésienne, *i.e.* l'incrément spatial, dans chaque direction, doit être constant. Cette contrainte n'est en pratique pas un problème pour des données issues de l'expérience. Néanmoins, il est très rare que ce soit vrai dans le cas de données issues de simulations numériques, où les grilles ne sont couramment pas régulières (par exemple une grille exponentiellement raffinée aux bords du domaine pour traiter les couches limites). Une solution pour les jeux de données non-réguliers est proposé section 2.4.6. Trouver la position du nœud de grille le plus proche du point courant (*cf.* figure 2.4.5) est dans ce cas immédiat.

Par soucis de lisibilité, les calculs suivant sont effectués sur une grille spatiotemporelle 3D. X_1 et X_2 seront les dimensions spatiales, et t dénotera le temps. La généralisation à un espace $n - D$ est directe. Les paramètres pour une interpolation linéaire sont, en

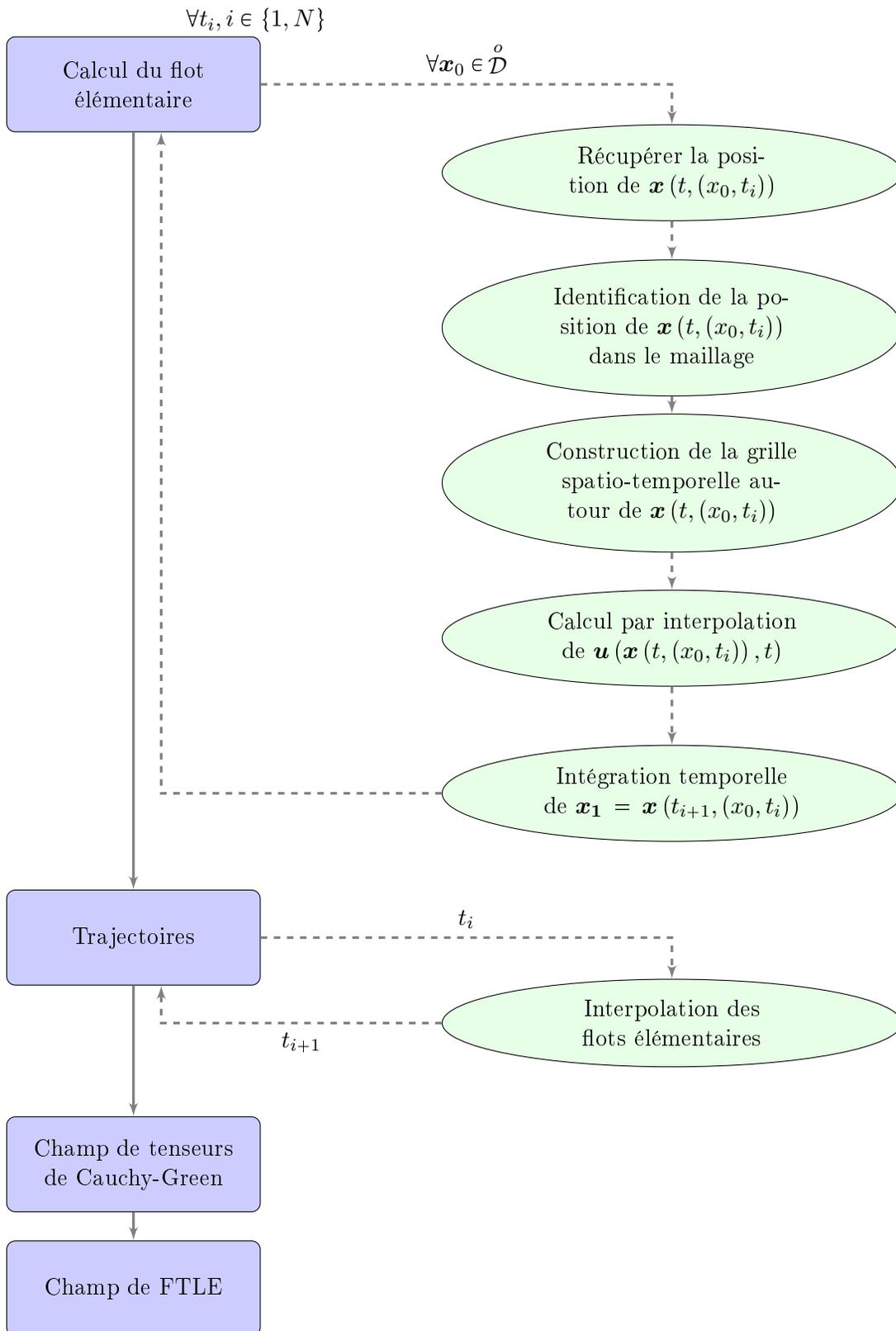


Figure 2.7 – Principales étapes de l’algorithme.

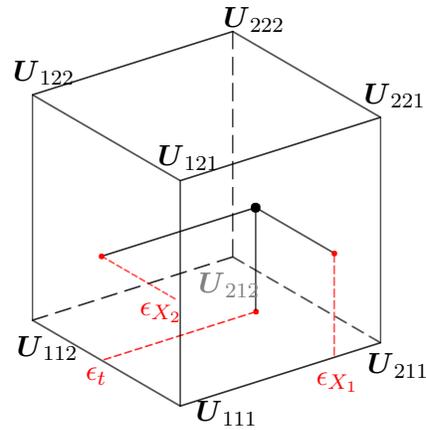


Figure 2.8 – Position d’une particule dans le maillage.

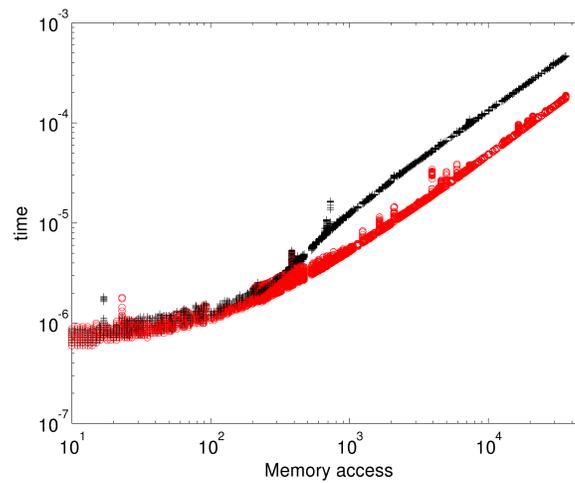


Figure 2.9 – Temps nécessaire pour réaliser un certain nombre d’accès mémoire. Les cercles rouges représentent des données coalescentes, et les cercles noirs des données susceptibles de générer des cache-miss.

prenant les notations de la figure 2.4.5, pour un point \mathbf{x}_0 :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = & \mathbf{U}_{111}\tilde{\epsilon}_{X_1}\tilde{\epsilon}_{X_2}\tilde{\epsilon}_t + \mathbf{U}_{211}\epsilon_{X_1}\tilde{\epsilon}_{X_2}\tilde{\epsilon}_t \\ & + \mathbf{U}_{121}\tilde{\epsilon}_{X_1}\epsilon_{X_2}\tilde{\epsilon}_t + \mathbf{U}_{221}\epsilon_{X_1}\epsilon_{X_2}\tilde{\epsilon}_t \\ & + \mathbf{U}_{112}\tilde{\epsilon}_{X_1}\tilde{\epsilon}_{X_2}\epsilon_t + \mathbf{U}_{212}\epsilon_{X_1}\tilde{\epsilon}_{X_2}\epsilon_t \\ & + \mathbf{U}_{122}\tilde{\epsilon}_{X_1}\epsilon_{X_2}\epsilon_t + \mathbf{U}_{222}\epsilon_{X_1}\epsilon_{X_2}\epsilon_t \end{aligned} \quad (2.19)$$

$\tilde{\epsilon}_i$ est l'écriture contractée de la quantité $1 - \epsilon_i$, pour $i \in \{X_1, X_2, t\}$. L'équation précédente (2.19) se réécrit matriciellement comme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{U}_{cube}^{\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{x}_0}, \quad (2.20)$$

avec

$$\mathbf{U}_{cube}^{\mathbf{x}_0} = \{\mathbf{U}_{111}, \mathbf{U}_{211}, \mathbf{U}_{121}, \mathbf{U}_{221}, \mathbf{U}_{112}, \mathbf{U}_{212}, \mathbf{U}_{122}, \mathbf{U}_{222}\}^\dagger, \quad (2.21)$$

où \dagger est l'opérateur de transposition. $\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{x}_0}$ dépend de ϵ_{X_1} , ϵ_{X_2} et de ϵ_t et peut être décomposé selon des matrices M_i , pour $i \in \{X_1, X_2, t\}$, dépendant des coefficients ϵ_i :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{x}_0} = M_{X_1}(\epsilon_{X_1}) \star M_{X_2}(\epsilon_{X_2}) \star M_t(\epsilon_t) \quad (2.22)$$

en notant la multiplication terme-à-terme \star . M_i est construit en considérant la relation (2.19), mais peut se déduire directement de ϵ_i , par la soustraction matricielle $M_i = B_i - \epsilon_i A_i$, où A_i et B_i sont des rotations binaires (ici de dimensions 3). Ainsi, dans le cas de la dimension deux, on identifie pour la première direction d'espace :

$$\begin{aligned} B_{X_1} &= \{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1\}^\dagger \\ A_{X_1} &= \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1\}^\dagger, \end{aligned} \quad (2.23)$$

et, pour la seconde direction d'espace :

$$\begin{aligned} B_{X_2} &= \{0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1\}^\dagger \\ A_{X_2} &= \{-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1\}^\dagger, \end{aligned} \quad (2.24)$$

et, pour finir, les matrices correspondant au temps s'écrivent :

$$\begin{aligned} B_t &= \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}^\dagger \\ A_t &= \{-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1\}^\dagger. \end{aligned} \quad (2.25)$$

L'équation (2.20) ne dépend plus de référence spatiale, et peut être vectorisée :

$$\mathbf{U}_{vect} = \text{diag}(\mathbf{U}_{cube}^{vect} \boldsymbol{\epsilon}^{vect}). \quad (2.26)$$

\mathbf{U}_{vect} étant le résultat de n_{vect} itérations, pour les points $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n_{vect}}\}$, traités en un seul cycle :

$$\mathbf{U}_{vect} = \{\mathbf{U}(\mathbf{x}_1), \mathbf{U}(\mathbf{x}_2), \dots, \mathbf{U}(\mathbf{x}_{n_{vect}})\}, \quad (2.27)$$

et \mathbf{U}_{cube}^{vect} étant :

$$\mathbf{U}_{cube}^{vect} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{cube}^{\mathbf{x}_1}{}^\dagger \\ \mathbf{U}_{cube}^{\mathbf{x}_2}{}^\dagger \\ \vdots \\ \mathbf{U}_{cube}^{\mathbf{x}_{n_{vect}}}{}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

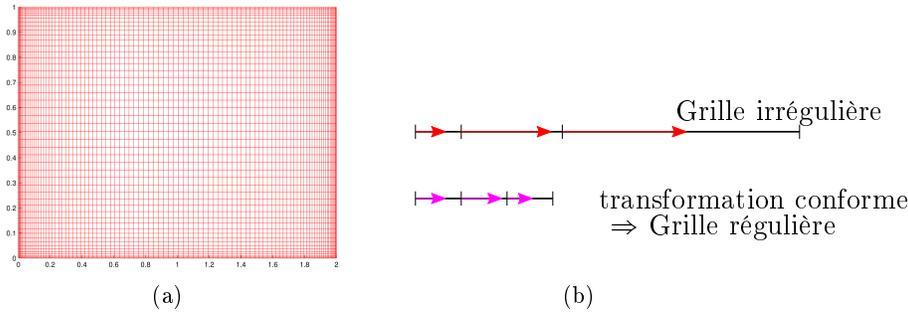


Figure 2.10 – (a) maillage non-régulier. (b) Déformation conforme d’un maillage. Un invariant est préservé lors du passage du maillage non-régulier au maillage régulier. La même transformation est appliquée à la fois au maillage et au champ de vitesse (rouge), donnant un champ de donnée (violet) et une grille virtuelle.

Finalement, ϵ^{vect} s’écrit :

$$\epsilon^{vect} = \{\epsilon^{x_1}, \epsilon^{x_2}, \dots, \epsilon^{x_{nvect}}\}. \quad (2.29)$$

La multiplication terme-à-terme étant une opération vectorielle, l’équation (2.22) se trouve être très efficace. De plus, implémenter un traitement SIMD à partir de cette formulation est naturelle.

L’interpolation est du premier ordre. Faire une interpolation d’ordre plus élevée n’a pas été faite dans ces travaux, bien que l’algorithme puisse facilement être adapté en ce sens. Ruijters & Thevenaz [153] ont énoncé un algorithme, basé sur une cascade d’interpolations linéaires, identifiant les paramètres d’une interpolation par spline. Les questions de précisions sont néanmoins fondamentales, et sont abordées section 2.5.2.

2.4.6 Déformation conforme du jeu de données

L’algorithme présenté requiert une grille cartésienne régulière. Lorsque cela n’est pas le cas, une solution est de modifier le jeu de données et la grille spatiale associée afin que l’ensemble de données réponde à ce critère. J’ai donc implémenté un module de déformation conforme. Faire une déformation conforme revient à déformer simultanément, de manière réversible, le champ de donnée et la grille spatiale dans chaque direction, en utilisant comme pivot invariant l’incrément temporel :

$$dT = \frac{dX_i}{\mathbf{u}_{x_i}} = \frac{d\tilde{X}_i}{\tilde{\mathbf{u}}_{x_i}} \quad (2.30)$$

Le nouveau jeu de données est donc défini sur une grille virtuelle, mais régulière. Ainsi, l’algorithme permet de traiter n’importe quel type de grille cartésienne, qu’elle soit régulière ou non. Néanmoins, les maillages non-ordonnés ou adaptatifs ne peuvent, pour l’instant, convenir. L’opération de déformation conforme est rapide et n’impacte pas significativement l’efficacité finale de l’algorithme.

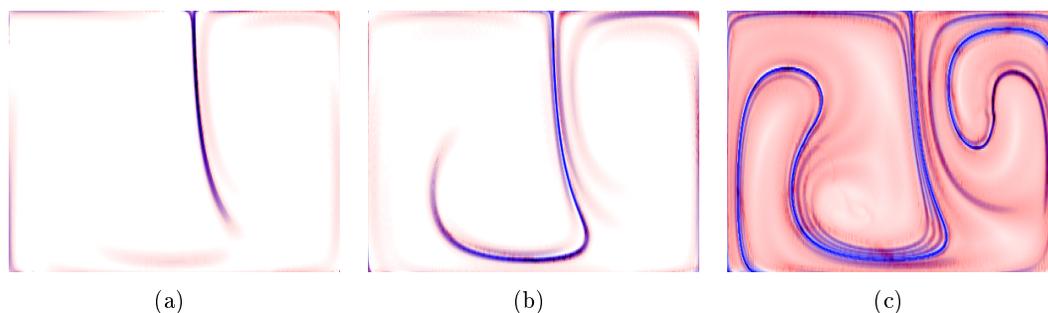


Figure 2.11 – Champs de FTLE pour un écoulement de double gyre (voir la section 2.5.1 pour plus de précision), pour différents horizons temporels, (a) : $T = \mathcal{T}/2$, (b) : $T = 3\mathcal{T}/4$ et (c) : $T = 3\mathcal{T}/2$. Le champ bleu correspond à la valeur propre maximale du tenseur de Cauchy-Green, tandis que le rouge correspond à la valeur propre minimale. Lorsque les crêtes rouges et bleues se rencontrent, la couleur est assombrie pour faciliter la visualisation.

2.4.7 Une définition précise de l'exposant de Lyapunov

La condition de divergence nulle, en deux dimensions, implique que les maximas locaux du champs de FTLE doivent correspondre aux *minimas* du champ de FTLE défini par la valeur propre minimal du tenseur de Cauchy-Green (voir équations (2.14) et (2.15)). La vérification de cette correspondance, présentée figure 2.11, semble pourtant être rompue à mesure que le temps horizon T augmente. L'accord entre les deux champs, figure 2.11(a), est bon pour les temps courts. Les champs respectivement rouge et bleu (le champ des exposants respectivement minimum et maximum du tenseur de Cauchy-Green) coïncident. Pour des horizons plus grands, les crêtes du champ minimum semblent expulsées des crêtes du champ de FTLE (figure 2.11(b)). Ce phénomène s'amplifie avec l'horizon. Figure 2.11(c), la concordance entre les champs n'est bonne aux pointes des structures, ce qui correspond au développement des structures. Il est à noter que, si le champ minimum est plus sensible au bruit, il est également plus sensible à la dynamique. Les crêtes du champ d'exposant minimum du tenseur de Cauchy-Green se forment *avant* celle du champ de exposants de Lyapunov à temps fini, *i.e.* pour des temps horizons plus courts. Des considérations de ce type, applicables sur le champ de tenseurs de Cauchy-Green, ont conduit récemment Farazmand & Haller [44] à proposer une méthode pour calculer les structures cohérentes lagrangiennes attractives *et* répulsives en se basant sur le champ de tenseurs.

Le fait que cette correspondance soit rompue peut être due à la mauvaise définition de l'exposant de Lyapunov à temps fini. La définition proposée équation (2.14) n'est valable que dans l'espace tangent au point initial \mathbf{x}_0 . Les FTLE sont calculés, en pratique, en ne considérant que les états initial et final. Le taux de divergence calculé est donc une moyenne de ce taux instantané, incluant les effets des non-linéarités. Dès que les non-linéarités dominent l'évolution de la trajectoire, la divergence ne peut être assurée par le calcul de l'équation (2.15). En pratique, cette équation traduit une hypothèse, que le tenseur des contraintes reste identique le long de la trajectoire, ce qui n'est évidemment pas le cas.

Pour conserver les propriétés de divergence, il suffit d'intégrer les valeurs locales et

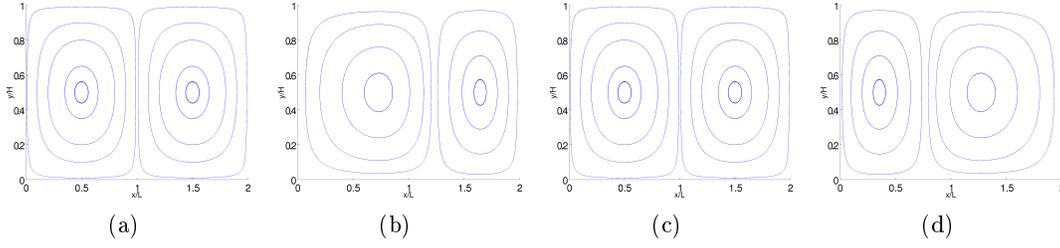


Figure 2.12 – Lignes de courant de l’écoulement du double-gyre pour différents temps. (a) $t = 0$. (b) $t = \mathcal{T}/4$. (c) $t = \mathcal{T}/2$. (d) $t = 3\mathcal{T}/4$.

instantanées de la divergence matérielle le long de la trajectoire $\mathbf{x}(t, (\mathbf{x}_0, t_0))$:

$$\sigma_{t_0}^T(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sigma_{\tau}^{\tau+dt}(\mathbf{x}(\tau, (\mathbf{x}_0, t_0))) d\tau. \quad (2.31)$$

L’indice 0 est par la suite abandonnée par soucis de lisibilité. Pour calculer le taux local de divergence σ_t^{t+dt} , il est opportun de revenir à l’écriture de la perturbation autour d’un point \mathbf{x} dans l’équation (2.11).

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x}(t+dt) &= \delta\mathbf{x}(t) + (\mathbf{u}(\mathbf{x}_0(t), t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)) dt \\ &= \delta\mathbf{x}(t) + (\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) \delta\mathbf{x}(t)) dt \\ &= \underbrace{(\mathbb{I} + \nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) dt)}_{\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)} \delta\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.32)$$

où $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ peut être interprété comme l’opérateur d’évolution de la perturbation $\delta\mathbf{x}$ au temps t . Comme dans l’équation (2.14), le tenseur local de Cauchy-Green $\mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}$ permet de calculer le taux de divergence, local dans le cas présent. Le maximum des valeurs propres du tenseur, $\lambda_t^{t+dt}(\mathbf{x})$, permet de définir l’exposant de Lyapunov local et instantané :

$$\sigma_t^{t+dt}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2dt} \ln \left\| \lambda_t^{t+dt}(\mathbf{x}) \right\|_2 \quad (2.33)$$

Cette définition, néanmoins, ne sera pas utilisée dans la suite, bien qu’elle ait été implémentée. Les coûts en stockage et en écriture disque sont en effet doublés (en plus de stocker les flots élémentaires, les exposants locaux et instantanés doivent l’être également), et les calculs rajoutés sont significatifs (interpolation des exposants instantanés le long des trajectoires).

2.5 Validations numériques

2.5.1 Présentation du double gyre

Dans la suite de cette section, les erreurs, les déformations conformes et les gains numériques seront validés et quantifiés sur un écoulement synthétique 2D périodique, le double-gyre, utilisé dans la littérature [72, 18].

L’écoulement de double-gyre modélise l’oscillation de deux cellules de Rayleigh-Bénard. Chaque cellule gonfle puis se rétrécit périodiquement, comme illustré figure 2.12.

La fonction courant associée à cet écoulement s'écrit :

$$\Psi(x, y, t) = a \sin(\pi h(x, t)) \cos(\pi(y/H)), \quad (2.34)$$

avec

$$h(x, t) = \epsilon \sin(\omega t) (x/L)^2 + (x/L) (1 - 2\epsilon \sin \omega t). \quad (2.35)$$

avec $(x, y) \in [0, 2L] \times [0, H]$. Les paramètres utilisés sont $a = 0.1$, $\omega = 2\pi/10$ (correspondant à une période $\mathcal{T} = 10$) et $\epsilon = 0.25$, et les paramètres géométriques sont $L = 1$ et $H = 1$.

2.5.2 Analyse des erreurs

Comme précédemment dit, les erreurs sont un prix à payer pour avoir un calcul des structures rapide. Néanmoins, si les erreurs de trajectoires restent raisonnables, nous montrons dans ce qui suit que les erreurs ne devraient pas avoir un impact sur l'identification des propriétés dynamiques de l'écoulement. L'analyse suivante des erreurs est en trois parties. La première estime l'erreur théorique du calcul et son évolution. Ensuite, les erreurs de trajectoires sont quantifiées. En dernier lieu, les erreurs sur le champ de FTLE sont estimées.

2.5.2.1 Erreurs théoriques

Considérons une erreur ϵ , introduite soit par les interpolations ou par le schéma, sur une trajectoire initialement au point \mathbf{x}_0 , au temps t_0 . Alors, l'évolution au temps T de l'erreur est prédite par le flot :

$$\Phi_{t_0}^T(\mathbf{x}_0 + \epsilon) \approx \Phi_{t_0}^T(\mathbf{x}_0) + \frac{d\Phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}} \cdot \epsilon. \quad (2.36)$$

Le terme $\left\| \frac{d\Phi_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}} \cdot \epsilon \right\|_2$ est donc une estimation de l'évolution de l'erreur. On peut décrire ce terme en :

$$\left\| \frac{d\Phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}} \cdot \epsilon \right\|_2 = \sqrt{\langle \epsilon, \Delta_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0) \cdot \epsilon \rangle}. \quad (2.37)$$

Alors, en reprenant l'équation (2.15), l'amplification maximale possible de l'erreur par le système est :

$$\max \left(\left\| \frac{d\Phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}} \cdot \epsilon \right\|_2 \right) = e^{\sigma_{t_0}^T(\mathbf{x}_0)|T|} \|\epsilon\|_2, \quad (2.38)$$

qui implique que les erreurs grossissent dans les zones où l'exposant de Lyapunov à temps fini $\sigma \geq 0$ est important, *ie* quand le champ FTLE est fort. L'équation (2.38) permet de quantifier l'importance relative des erreurs. Le point majeur est de montrer que des méthodes d'intégrations d'ordre élevés, par exemple un Runge-Kutta 4, ne sont pas nécessaires, et qu'une méthode d'Euler est suffisante pour obtenir les structures cohérentes lagrangiennes.

Les erreurs avec une méthode d'intégration de Runge Kutta 4 sont proportionnelles à Δt^5 , où Δt est le pas d'intégration. Donc, après un temps t_{rk4} , l'erreur est, utilisant l'équation (2.38) :

$$err_{rk4} \approx \exp(\sigma t_{rk4}) \Delta t^5. \quad (2.39)$$

De façon comparable, l'erreur provenant de l'intégrateur d'Euler est proportionnelle au pas de temps. Ainsi :

$$err_e \approx \exp(\sigma t_e) \Delta t. \quad (2.40)$$

En égalisant les équations (2.39) et (2.40), on obtient :

$$err_{rk4} \approx err_e, \quad (2.41)$$

en réinjectant les termes des équations (2.39) et (2.40) :

$$\exp(\sigma t_{rk4}) \Delta t^5 \approx \exp(\sigma t_e) \Delta t, \quad (2.42)$$

et donc :

$$\exp(\sigma(t_{rk4} - t_e)) \approx \Delta t^{-4} \quad (2.43)$$

ce qui implique que

$$t_e \approx t_{rk4} + \frac{4 \log(\Delta t)}{\sigma}. \quad (2.44)$$

Ainsi, quand la valeur du champ de FTLE est plus grande que le logarithme du pas de temps Δt utilisé par l'intégrateur, alors, les différences ne sont plus significatives, en terme d'erreur, entre une méthode à haut ordre d'intégration et une méthode d'Euler. Les calculs sont similaires pour les erreurs d'interpolations, et donnent des résultats comparables pour les erreurs spatiales.

Dans le cas d'écoulements mélangeants, où de forts exposants de Lyapunov à temps fini sont attendus, les erreurs d'intégration ou d'interpolation ne devraient donc pas constituer un obstacle à l'identifications des LCS au travers du champ de FTLE. On vérifie ce point dans les sections suivantes 2.5.2.2 et 2.5.2.3.

2.5.2.2 Erreurs sur les trajectoires

L'algorithme proposé pour le calcul de champs de exposants de Lyapunov à temps fini a été appliqué sur l'écoulement synthétique du double-gyre. Les trajectoires sont calculées et conservées pour chaque point de la grille et sont calculées également par l'algorithme de référence, utilisant un Runge Kutta d'ordre 4, avec pas de temps adaptatif. A des fins de comparaison, et pour se placer dans un cas d'utilisation, les mêmes données de vitesse sont utilisées dans les deux cas. Une interpolation de type spline est utilisée par l'algorithme de référence pour estimer la vitesse en un point quelconque, à partir du jeu de données.

L'erreur err^T , pour un horizon T , est définie comme une combinaison des distances moyennes entre trajectoires (*ie* l'intégrale de l'écart) et l'écart au temps final :

$$err^T(\mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{2} (err_{traj}^T(\mathbf{x}_0, t_0) + err_{sep}^T(\mathbf{x}_0, t_0)), \quad (2.45)$$

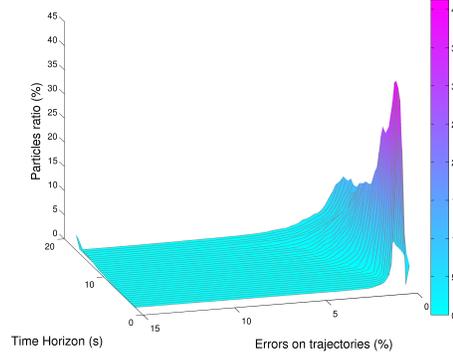


Figure 2.13 – Distributions des erreurs, défini selon l'équation (2.45), en fonction du temps

où l'on définit :

$$\begin{aligned}
 err_{traj}^T(\mathbf{x}_0, t_0) &= \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} \|\mathbf{x}_{fftle}(t, (\mathbf{x}_0, t_0)) - \mathbf{x}(t, (\mathbf{x}_0, t_0))\|_2 dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} \|\mathbf{x}(t, (\mathbf{x}_0, t_0))\|_2 dt} \\
 err_{sep}^T(\mathbf{x}_0, t_0) &= \frac{\|\mathbf{x}_{fftle}(t_0 + T, (\mathbf{x}_0, t_0)) - \mathbf{x}(t_0 + T, (\mathbf{x}_0, t_0))\|_2}{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \|\mathbf{x}(t, (\mathbf{x}_0, t_0))\|_2 dt}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

La longueur de la trajectoire de référence est utilisée comme un facteur de normalisation.

Pour un temps horizon court, il n'y a presque pas de séparation importante entre la trajectoire de référence et la trajectoire issue de l'algorithme présenté dans la section 2.4. C'est clairement représenté figure 2.13. Le pic d'erreur est net et centré autour d'une erreur à 0.6% pour des temps courts. Quand l'horizon augmente, le pic est, comme attendu, lissé. Néanmoins, le pic reste centré sur des valeurs inférieures à 1%. Il est également notable qu'un second pic émerge à gauche, pour des horizons grands, représentant des erreurs supérieures que 15%. Ces erreurs proviennent de trajectoires issues de régions fortement mélangeantes. Lorsque l'horizon s'accroît, l'écoulement étant mélangeant, les chances que des trajectoires relatives divergent ne peuvent qu'augmenter. C'est normal, étant donné que les chances que les particules traversent des zones fortement mélangeantes s'accroissent également. Les trajectoires s'écarteront dès que l'exposant de Lyapunov local est grand. L'erreur augmente exponentiellement dans ces régions (*cf.* la section 2.5.2.1). Dans les régions non-mélangeantes, comme on pouvait s'y attendre, les trajectoires restent quasi-identiques, l'effet de l'exposant étant localement négligeable. C'est ce que l'on peut voir sur la figure 2.14. La concordance entre les régions fortement mélangeantes, représentées par le champ de exposants de Lyapunov à temps fini, et la carte des erreurs, est presque totale. Les marques visibles dans les structures des erreurs, dans la partie supérieur gauche, centre gauche et centre droit, signalées en rouge, sont à l'endroit où les structures cohérentes lagrangiennes attractives croisent les structures cohérentes lagrangiennes répulsives. Les trajectoires doivent converger vers ces variétés, il n'est donc pas surprenant que les erreurs y soient plus faibles.

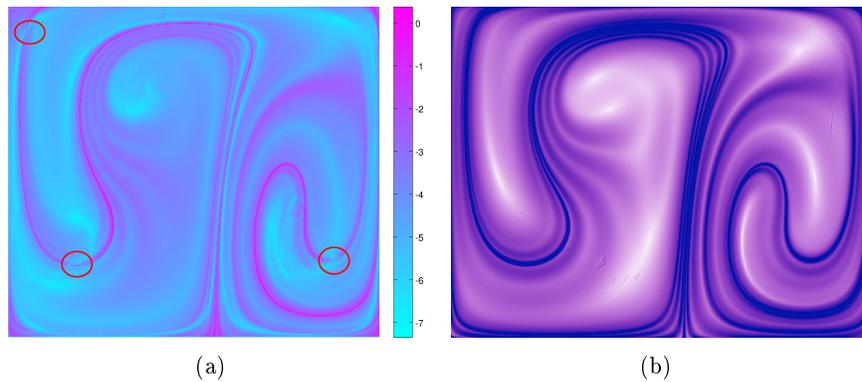


Figure 2.14 – (a) : Cartographie du logarithme de l’erreur. L’influence des variétés stables sur les erreurs est souligné par les cercles rouges. Le champ de FTLE est rappelé figure (b).

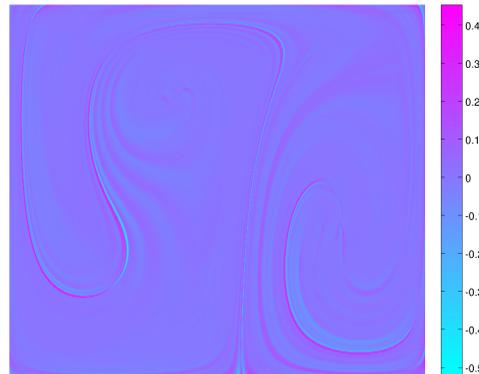


Figure 2.15 – Différence entre le champ de FTLE calculé par une méthode classique et le champ de FTLE issu de l’algorithme présenté dans la section 2.4

2.5.2.3 Erreurs sur le champ d’exposants de Lyapunov à temps fini

Des différences peuvent être perçues entre le calcul issu de l’implémentation de la méthode de Haller, et les résultats de mon algorithme. Les erreurs sur champ d’exposants de Lyapunov à temps fini peuvent donc être estimées.

Quantifier les disparités entre le champ de FTLE calculé avec une méthode classique et le résultat de l’algorithme proposé peut se faire par différence :

$$err = \frac{\|FTLE_{class} - FTLE\|_2}{\|FTLE_{legacy}\|_2}. \quad (2.47)$$

Ce problème est mal posé¹. Un petit déplacement global d’une structure peut introduire une modification disproportionnée de la norme du champ. Néanmoins, dans le cas

1. À titre illustratif, considérons l’erreur produite par une translation d’un pixel dans une image par rapport à elle-même. Les deux images sont (quasi) identiques. Néanmoins, si l’image de base est très

présenté, l'erreur est de $err = 2.59\%$. Le champ de différence est présenté en figure 2.15. Les écarts apparaissent comme des crêtes, très localisées en espace, et systématiquement autour des crêtes du champ de FTLE de référence, faisant penser à un déplacement global des structures identifiées.

Les algorithmes de type PIV (Vélocimétrie par Image de Particules) sont conçus pour identifier le déplacement de particules d'une image à une autre. Par conséquent, cette famille d'algorithmes paraît adapté pour quantifier des translations de structures. Les résultats sont présentés figure 2.16. Le champ de vecteurs représente le déplacement

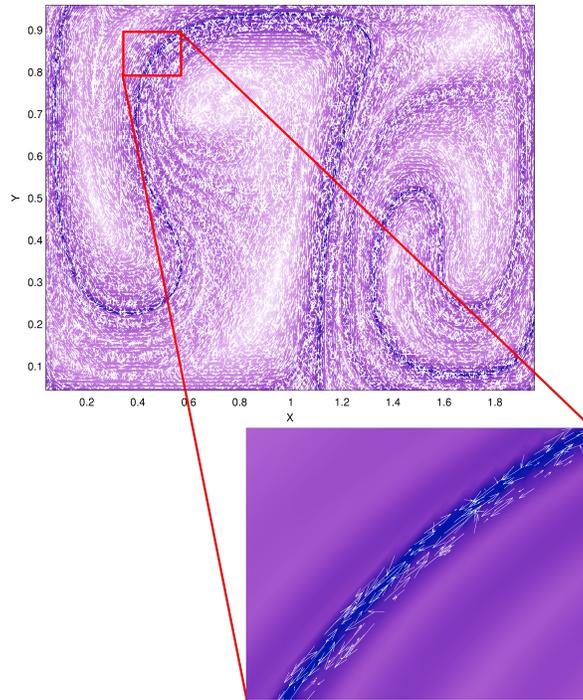


Figure 2.16 – Le fond coloré représente le champ d'exposants de Lyapunov à temps fini. Les flèches blanches représentent les écarts entre le champ de FTLE et le résultat calculé par l'algorithme classique, identifiés par un algorithme de PIV. Le zoom montre l'alignement, non pertinent, des déplacements le long des structures

permettant de faire correspondre les deux champs d'exposants de Lyapunov à temps fini. Quelques remarques suivent immédiatement. Premièrement, les algorithmes PIV ne traitent pas bien les zones sans contrastes. Mais ce ne sont pas les régions d'intérêt, contrairement aux voisinages des LCS. L'algorithme PIV vise à la détermination de déplacements de particules, le résultat doit donc être interprété. En pratique, les particules recherchées par l'algorithme PIV sont supposées être petites, alors que les LCS sont des structures allongées. Par conséquent, l'algorithme n'arrive pas à estimer précisément les déplacements le long des structures, car l'intensité du champ ne varie pas significativement dans ce cas. Le zoom de la figure 2.16 montre que les écarts entre le champ de

texturée, la norme de la différence donne une valeur importante, conduisant à la conclusion erronée que les deux images sont différentes.

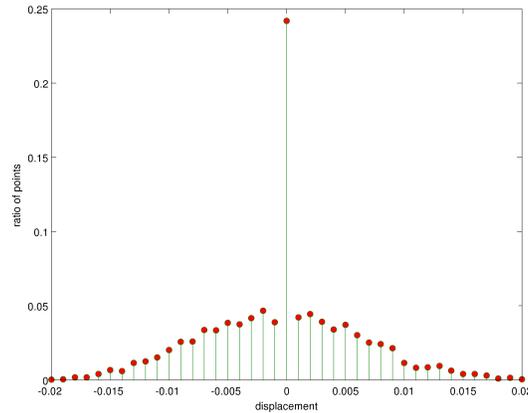


Figure 2.17 – Histogramme des déplacements perpendiculaires aux structures, en pourcentage du paramètre L .

référence et le champ calculé par l'algorithme sont principalement alignés avec les structures. Les champs de déplacement parallèles aux structures cohérentes lagrangiennes ne sont donc pas pertinents. En revanche, il n'y a pas de raison de remettre en cause l'identification des déplacements dans la direction *transverse* aux structures. L'historgramme des déplacements perpendiculaires aux structures, présenté 2.17, est bien centré sur 0. Les structures ne sont donc identifiées qu'à une faible imprécision transverse près, et les erreurs sont en majorité inférieures au pourcent.

Tableau 2.1 – Déplacements entre le champ d'exposants de Lyapunov à temps fini calculé par rapport au champ de FTLE de référence. La première ligne correspond au déplacement global. La seconde ligne compare les déplacements aux voisinages des crêtes du champ de FTLE. La dernière ligne ne concerne que le déplacement selon la direction perpendiculaire aux crêtes du champ de FTLE.

| Déplacement moyen | selon x | | selon y | |
|---------------------------|--------------------|------------|--------------------|-----------|
| Global | 0.26471 δx | 0.037816 % | 0.40151 δy | 0.11472 % |
| Voisinage | 0.1874 δx | 0.0265 % | 0.2180 δy | 0.0623 % |
| Direction perpendiculaire | 0.0558 δx | 0.0080 % | 0.0995 δy | 0.0284 % |

2.5.2.4 Conclusions sur les erreurs induites par la méthode

Ceci montre que l'intégration temporelle par une méthode d'Euler est suffisante pour le calcul des structures cohérentes lagrangiennes. Les erreurs ne sont amplifiées, *i.e.* des trajectoires initialement proches divergent, précisément à l'endroit où l'on trouve des LCS. Comme, en pratique, la méthode pour l'identification des LCS repose sur le calcul de la divergence matérielle, ces erreurs n'impactent pas le résultat.

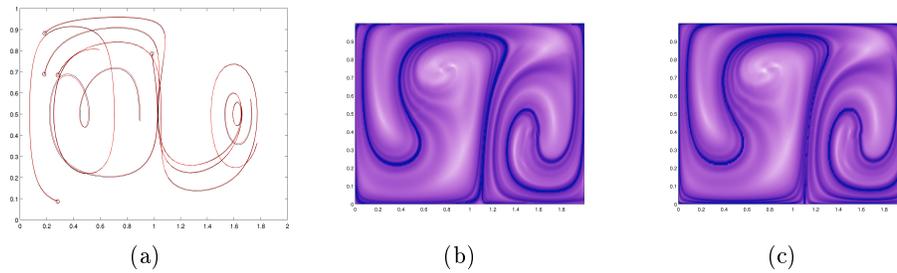


Figure 2.18 – (a) Quelques trajectoires, dans un écoulement mélangeant, calculées sur une grille non-régulière, par transformations conformes (en rouge) et sur une grille régulière (en noir). (b) : champs de FTLE, calculé pour un champ de vitesse associé à une grille régulière. (c) champs de FTLE, calculé pour un champ de vitesse associé à une grille non-régulière (présentée figure 2.10(a)).

2.5.3 Qualification des Déformations Conformes

La méthode est illustrée figure 2.18, sur l'écoulement double-gyre. Le maillage utilisé, non-régulier, est celui de la figure 2.10(a). Le maillage se raffine aux parois, et est plus grossier au centre.

Quelques trajectoires, prises initialement proches, sont représentées figure 2.18(a). Les différences sont principalement dues aux conditions initiales légèrement différentes lorsque les grilles régulières et non-régulières ne coïncident pas. Bien que passant dans des zones mélangeantes, les trajectoires ne divergent que très peu.

Le calcul du champ de FTLE donne des résultats très similaires, lorsque réalisé sur une grille conforme ou non-conforme. Les crêtes du champ de exposants de Lyapunov à temps fini sont bien positionnées aux mêmes endroits. Des différences peuvent néanmoins être notées. Sur la figure 2.18(b), le champ représenté est issu de l'algorithme de référence, et, figure 2.18(c) le champ est calculé en utilisant les transformations conformes. Les différences correspondent aux endroits où la résolution est spatialement différente, due au maillage. La topologie définie par les structures lagrangiennes est bien captée. Comme on pouvait s'y attendre, les LCS sont plus précises, figure 2.18(c), près des parois, précisément où la grille est plus raffinée dans le cas non-régulier. Néanmoins, les LCS sont plus grossières au centre de l'écoulement, conséquence attendue avec une grille spatiale moins raffinée au centre.

2.5.4 Accélération

Les gains et temps de calculs sont présentés tableaux 2.2 et 2.3, pour un champ de données 2D de tailles $(n_x, n_y, n_t) = (1024, 512, 400)$, en comparaison avec l'algorithme "standard" de Brunton & Rowley [18] (l'algorithme fourni [105] par le groupe **NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS GROUP** étant déjà 60 fois moins performant [18]). Les gains maximaux sont atteints dès que le nombre de points de la grille spatiale (en pratique $n_{\mathcal{D}} = n_x \times n_y$) est supérieur à la profondeur des pipelines du processeur. Cette profondeur, fournie par les constructeurs, est de l'ordre de la dizaine par cœur. Les calculs ont été réalisés sur un processeur **INTEL I7 EXTREM EDITION**, comportant 8 cœurs. L'implémentation sur des machines ayant plus de cœurs est triviale. Le gain de 90 pour

l'interpolation résulte de l'utilisation d'une carte graphique dédiée pour portable, la carte `nVIDIA QUADRO FX 1800M`. Sur une carte plus performante (type `nVIDIA TESLA`), un gain supplémentaire d'un ordre de grandeur, au minimum, est attendu. Le calcul est, en moyenne, accéléré par un facteur 250 à 1000, en comparant avec l'algorithme de Brunton & Rowley. La rapidité induite par cet algorithme permet d'envisager de ne pas stocker les flots élémentaires sur le disque, ce qui reste l'inconvénient principal de l'algorithme de Brunton & Rowley.

| | Méthode standard | Vectorisation | Parallélisation | GPU Interpolation |
|------------------|------------------|---------------|-----------------|-------------------|
| Calcul des flots | 1 | 350 | 1 | 1 |
| Calcul des FTLEs | 1 | 1 | 6.3 | 90 |

Tableau 2.2 – Gains des différentes implémentations, la méthode de Brunton & Rowley servant de référence.

| | Méthode standard | Vectorisation | Parallélisation | GPU Interpolation |
|------------------|------------------|---------------|-----------------|-------------------|
| Calcul des flots | 1 | 0.003 | 0.003 | 0.003 |
| Calcul des FTLEs | 1 | 1 | 0.16 | 0.002 |
| Temps total | 1 | 0.51 | 0.17 | 0.0025 |

Tableau 2.3 – Temps résultants suivant les différentes implémentations, la méthode de Brunton & Rowley servant de référence.

Chapitre 3

Applications à un écoulement de cavité ouverte

L'écoulement de cavité ouverte est une configuration académique présentant un fort intérêt théorique et un spectre d'applications relativement large. L'étude de cette configuration intéresse de nombreuses industries, *e.g.* les industries automobile et ferroviaire, l'aéronautique civile et militaire, *etc.* Une géométrie de type cavité ouverte se retrouve en pratique dans de nombreux cas, *e.g.* les ouvertures des trains d'atterrissage des avions civils, les soutes d'armement des avions militaires, l'écart entre les rames d'un train ou la césure des TGV pour ne citer que quelques exemples.

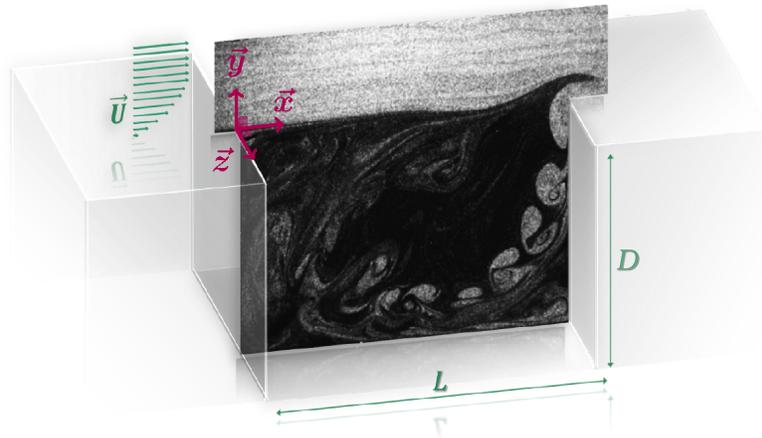


Figure 3.1 – Visualisation de l'écoulement de cavité, par de la fumée de spectacle, dans un plan vertical (x, y) . Le profil de Blasius de la couche laminaire en amont de la cavité est représenté en vert. D'après Basley [6]

La simplicité de la géométrie de l'écoulement de cavité n'empêche pas le développement d'une dynamique particulièrement complexe, illustrée sur la figure 3.1. Plusieurs phénomènes sont simultanément à l'œuvre, par exemple, l'impact de tourbillons sur la marche aval (potentiellement générateur de bruits et de fatigue des matériaux), l'injection de vorticité dans la cavité, et le couplage visible entre la recirculation interne et

la couche cisailée. L'écoulement de cavité ouverte, au travers de l'exploration de son auto-organisation et de ses instabilités, est ainsi un terrain propice à l'application des méthodes proposées et présentées dans ce travail.

3.1 Une introduction aux propriétés de l'écoulement de cavité

La caractéristique première de l'écoulement de cavité est la couche de mélange, issue du décollement de l'écoulement après le passage de la marche descendante. En amont de la cavité, la couche limite de paroi adopte un profil proche d'un profil de Blasius. Ce profil diffuse une fois le coin amont franchi (voir figure 3.2). Le point d'inflexion du nouveau profil de vitesse assure, d'après le critère de Rayleigh, que la couche de mélange puisse devenir instable vis-à-vis des modes de Kelvin-Helmholtz.

Le cas échéant, les modes de Kelvin-Helmholtz se développent dans la couche cisailée. Les oscillations résultantes, visibles sur la figure 3.1, impactent le coin aval et sont ainsi réfléchies sous forme d'ondes de pression, jusqu'au coin amont. En régime incompressible, la rétro-action est instantanée. Celle-ci agit comme une nouvelle perturbation, amplifiée en aval par la couche cisailée. Ce mécanisme d'oscillations auto-entretenues, décrit par Rossiter dès 1964 [150], est illustré sur la figure 3.2.

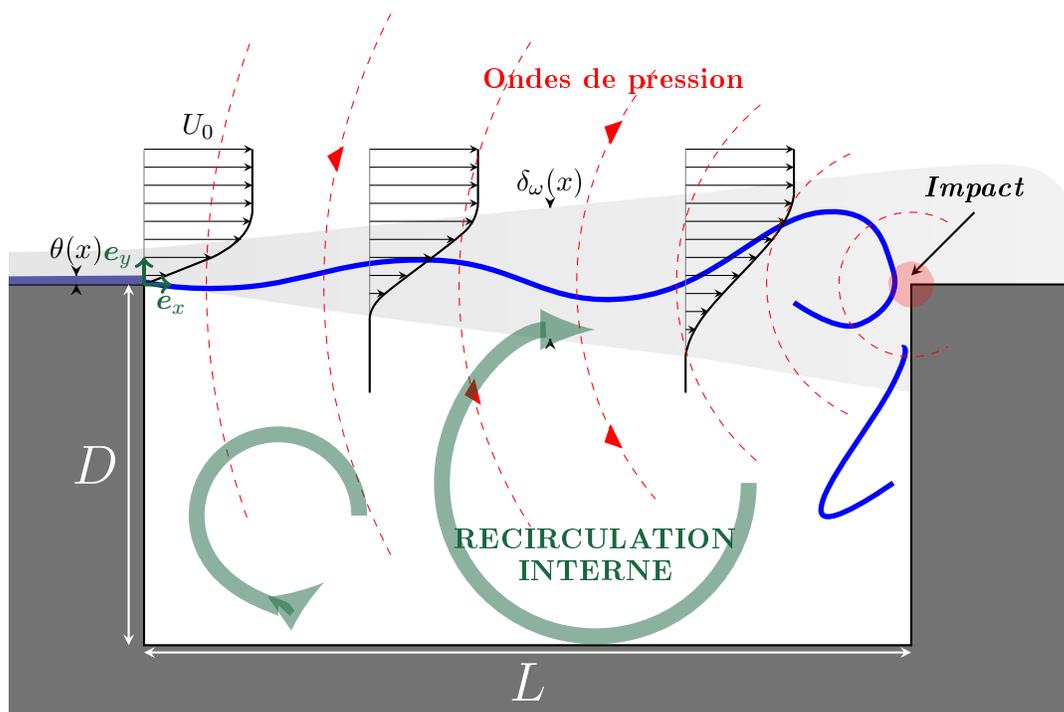


Figure 3.2 – Schéma de l'écoulement de cavité et des principaux phénomènes dynamiques, d'après Basley [6]

La boucle de rétro-action sélectionne un nombre fini de fréquences dans le spectre des modes instables de Kelvin-Helmholtz. Les fréquences sélectionnées dépendent di-

rectement de la géométrie de la cavité [150]. Une perturbation produite au coin amont met un temps L/U_{kh} pour atteindre le bord aval. Les ondes de pression remontent ensuite jusqu'au coin amont en un temps L/c , non négligeable dans un écoulement compressible. Ce temps fixe la période de la boucle de rétroaction :

$$nT_n = \frac{n}{f_n} = \frac{L}{c} + \frac{L}{U_{kh}}, \quad n \in \mathbb{N}^+, \quad (3.1)$$

où c est la vitesse du son dans le milieu et U_{kh} la vitesse de convection des instabilités de Kelvin-Helmholtz. En première approximation, la vitesse des ondes dans la couche de mélange est égale à la moitié de la vitesse d'entrée U_0 :

$$U_{kh}/U_0 \approx 0.5. \quad (3.2)$$

En régime incompressible (*i.e.* $c \rightarrow \infty$), la formule (3.1) se réduit à :

$$St_n = \frac{f_n L}{U_0} \approx \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^+, \quad (3.3)$$

globalement vérifiée expérimentalement, voir la figure 3.3.

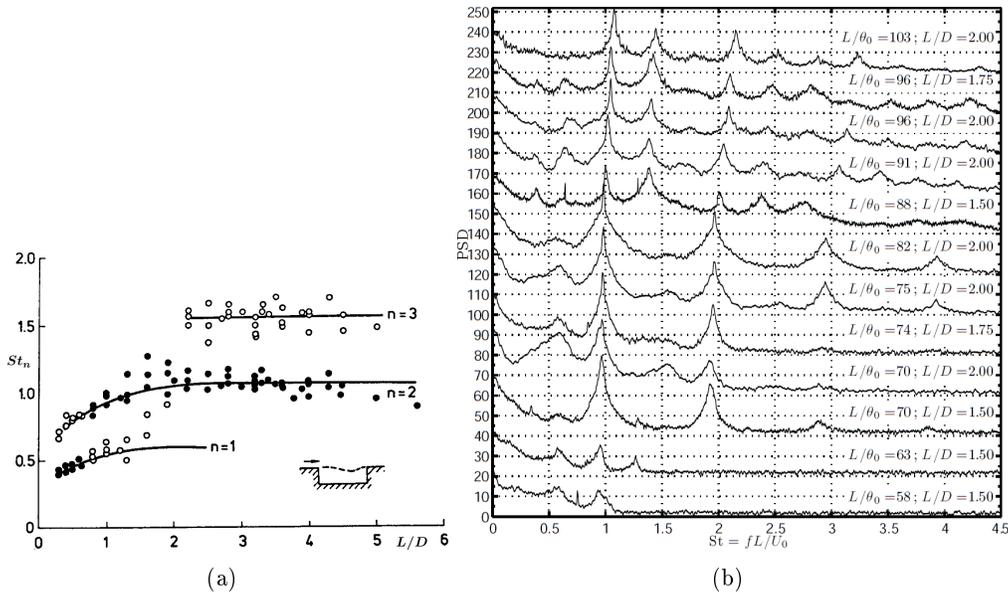


Figure 3.3 – Vérification expérimentale de la distribution des fréquences. (a) : Ajustement des fréquences principales sur la relation 3.1, en fonction de la géométrie, d'après Rockell [144]. (b) : Spectres de puissances pour différentes configurations, décalés de 20 dB par soucis de visibilité, d'après Basley [6].

Si, dans l'écoulement de cavité, le régime d'oscillations auto-entretenu est généralement associé à un seul mode de Kelvin-Helmholtz (et ses harmoniques), certaines configurations présentent un spectre organisé autour de deux fréquences [136, 116, 56]. Deux modes d'oscillations peuvent être sélectionnés, et statistiquement coexister dans le spectre. Les modes n'existent néanmoins pas simultanément dans l'écoulement [116]. La

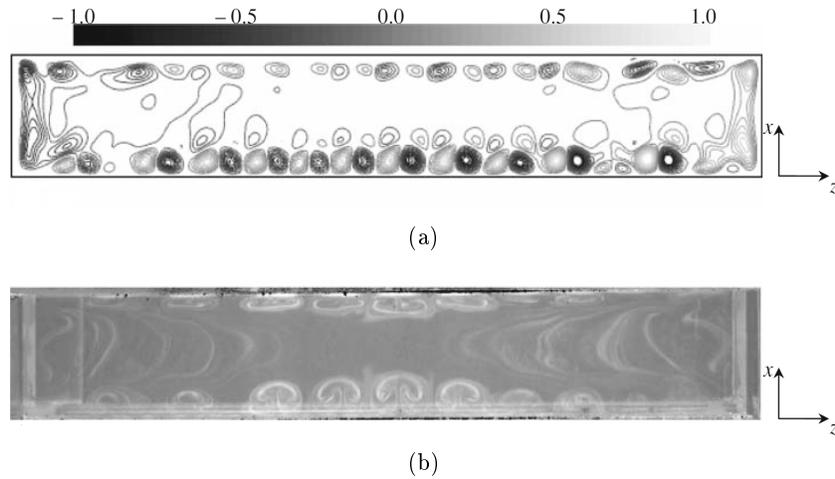


Figure 3.5 – Comparaison de l’hélicité du régime permanent issu de simulation numérique directe (a) et de la visualisation par fumée (b). D’après Faure *et al.* [45].

transition entre les régimes d’oscillation n’est pas un phénomène périodique, mais erratique. Le spectrogramme de la figure 3.4, réalisé sur des données issues de vélocimétrie laser dans une configuration présentant une compétition de modes, illustre le caractère imprévisible de la transition, et l’exclusion mutuelle d’un mode par l’autre.

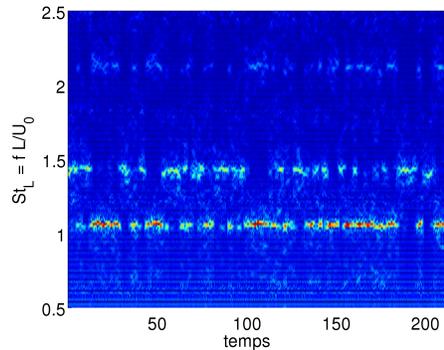


Figure 3.4 – Spectrogramme réalisé sur les données issues de mesures par vélocimétrie laser. La couleur code la densité spectrale de la puissance. Les modes à nombre de Strouhal 1 et 1.4 sont alternativement énergétiques.

Les caractéristiques de l’écoulement interne sont également associées à une dynamique complexe. Les observations expérimentales (*e.g.* les travaux de Basley [6]) montrent que la recirculation interne est modulée transversalement. L’instabilité responsable de cette ondulation est d’origine centrifuge. Lorsque cette instabilité se développe et sature, le résultat est une collection de tourbillons dans la direction transverse, souvent appelés dans la littérature tourbillons de Taylor Goertler, voir par exemple la figure 3.5. Les tourbillons dérivent vers les bords latéraux de la cavité. Basley [6] a montré que cette dérive est le résultat d’une somme d’ondes progressives, localisées en espace. Ces ondes

sont associées à des nombres de Strouhal inférieurs à 0.05.

3.2 Configurations étudiées

3.2.1 Données expérimentales

3.2.1.1 Présentation du dispositif expérimental

Les données expérimentales utilisées dans les études présentées par la suite proviennent de campagnes expérimentales menées au Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur, par J. Basley, T. Faure, F. Lusseyran & L. Pastur. Plus d'informations peuvent être trouvées dans [6] ou [7].

L'écoulement est créé par un ventilateur centrifuge placé en amont d'une chambre de tranquillisation (voir figure 3.6). Les particules pour la vélocimétrie sont introduites en entrée du ventilateur. Après la chambre, un conduit axial, suivi d'un nid d'abeille relaminarise l'écoulement. La veine se prolonge par un convergent puis la veine d'essais. Une plaque plane, avec un bord d'attaque elliptique permettant le développement d'une couche limite laminaire, est disposée en amont de la cavité. La longueur de la plaque est $A = 300$ mm. La veine d'essais est entièrement réalisée en verre antireflet. La hauteur de la cavité vaut $H = 50$ mm. Son envergure $S = 300$ mm est fixée par les parois latérales de la soufflerie, comme illustré figure 3.7. Principalement, trois nombres sans dimensions caractérisent l'écoulement : le nombre de Reynolds $Re_L = U_0 L / \nu$, le rapport d'envergure $F = S/H = 6$, et le rapport de forme de la cavité $R = L/H$. Ce dernier rapport peut être changé en déplaçant les parties en verre qui constituent la paroi aval de la cavité et la plaque aval, de longueur $B = 370$ mm. À la sortie de la veine, l'écoulement est évacué dans la salle d'expérience. Le nombre de Reynolds Re_L est déterminé sur la longueur de la cavité L et la vitesse extérieure à la couche limite amont U_0 . L'origine du système de coordonnées est placée au bord amont de la cavité à mi-envergure, l'axe des abscisses x est défini par la direction de l'écoulement, l'axe des ordonnées y est normal à la paroi amont et l'axe z est porté par l'envergure de la cavité.

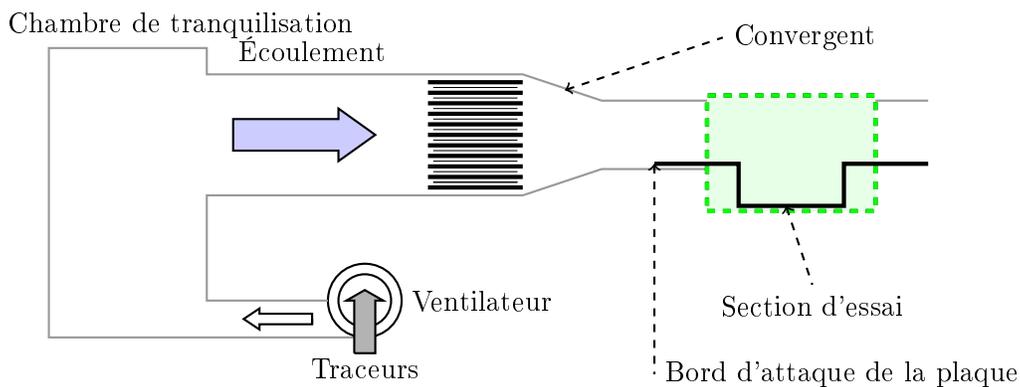


Figure 3.6 – Schéma du dispositif expérimental.

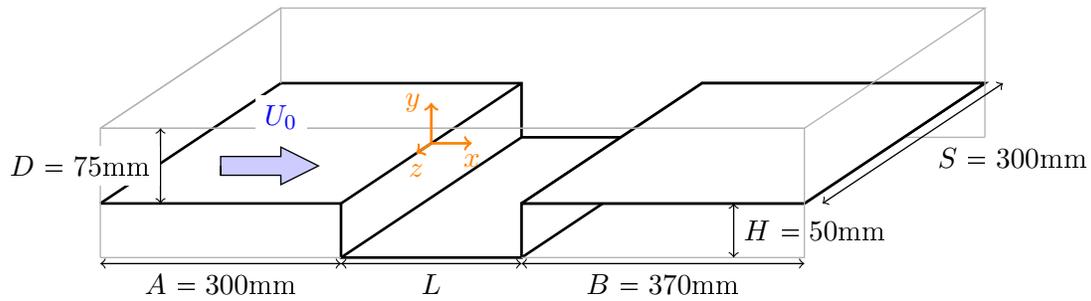


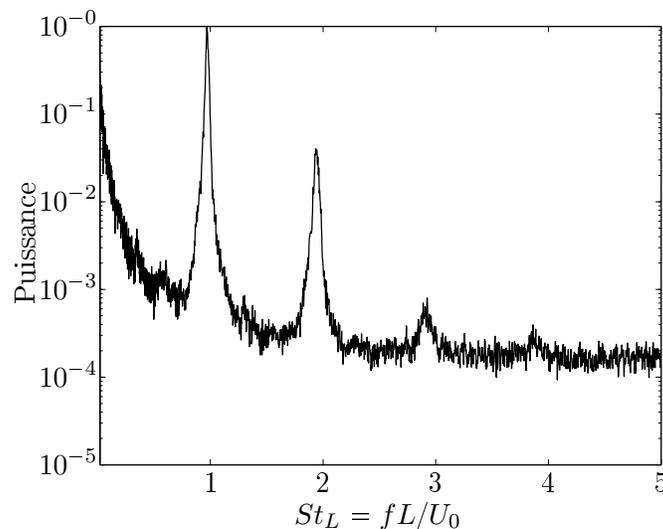
Figure 3.7 – Dimensions de la section d’essai, et coordonnées.

3.2.1.2 Cas sans intermittence

Le ratio géométrique de la cavité, pour cette configuration, est $L/H = 1.5$. La vitesse d’entrée ($x = 0$) est $U_0 = 1.77$ m/s, ce qui correspond à un nombre de Reynolds, calculé sur la longueur L , de $Re_L = 8800$.

Le spectre, représenté figure 3.8, se structure autour d’une fréquence principale associée à un nombre de Strouhal proche de 1.

Le jeu de données contient $N = 5242$ réalisations de la vitesse dans le plan (x, y) , présenté précédemment. La fréquence d’échantillonnage est de 250 Hz ($\Delta t = 4.10^{-3}$ s). Le jeu de données filtrées contient $n_{p\,filt} = 7018$ points, le jeu complet $n_{p\,tot} = 385600$.

Figure 3.8 – Spectre de puissance, issu de données acquises par vélocimétrie laser, pour la géométrie de cavité $R = 1.5$.

3.2.1.3 Cas avec intermittence

Le ratio géométrique de la cavité, pour cette configuration, est $L/H = 2$. La vitesse d’entrée ($x = 0$) est $U_0 = 1.89$ m/s, ce qui correspond à un nombre de Reynolds, calculé

sur la longueur L , de $Re_L = 12670$.

Cette configuration est associée à un régime intermittent, *i.e.* deux modes distincts sont en compétition dans l'écoulement et structurent, successivement, la couche cisailée. Par conséquent, le spectre, illustré figure 3.9, est construit autour de deux fréquences principales associées aux nombres de Strouhal respectivement 1, et 1.4.

Le jeu de données contient $N = 4096$ réalisations de la vitesse mesurée par vélocimétrie par image de particules (PIV) dans le plan (x, y) , présenté précédemment. La fréquence d'échantillonnage est de 250 Hz ($\Delta t = 4.10^{-3}$ s). L'ensemble de données filtrées contient $n_{p_{filt}} = 9192$ points, le jeu complet $n_{p_{tot}} = 490400$.

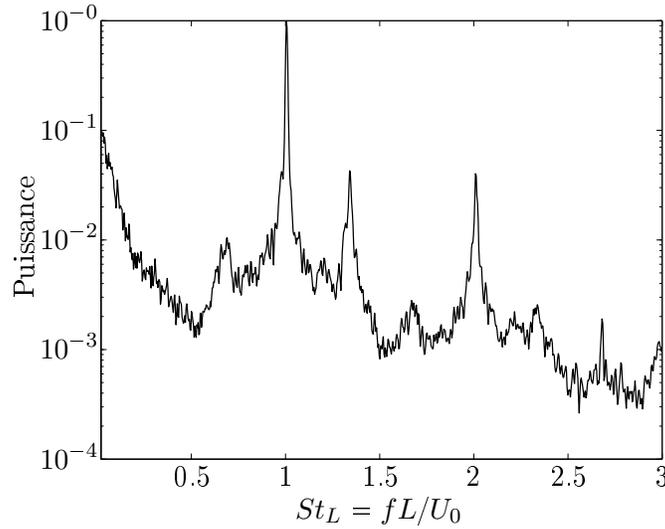


Figure 3.9 – Spectre de puissance, issu de données acquises par vélocimétrie laser, pour la géométrie de cavité $R = 2$.

3.2.2 Données numériques

Le ratio géométrique de la cavité, pour cette configuration, est $L/H = 2$. La vitesse débitante est $U_0 = 1.2$ m/s, ce qui correspond à un nombre de Reynolds, calculé sur la longueur L , de $Re_L = 8040$.

Le spectre, représenté figure 3.8, est construit autour d'une fréquence principale associée à un nombre de Strouhal proche de 1.

Le jeu de données contient $N = 4096$ réalisations de la vitesse, obtenues par simulation numérique directe 3D des équations de Navier-Stokes. La fréquence d'échantillonnage est de 40 Hz ($\Delta t = 2.5.10^{-2}$ s). L'espace est discrétisé en $(n_x, n_y, n_z) = (259, 128, 192)$ points de maille. L'ensemble de données contient donc $n_p = n_x \times n_y \times n_z \times 3$ soit $n_p \approx 2.10^7$ points.

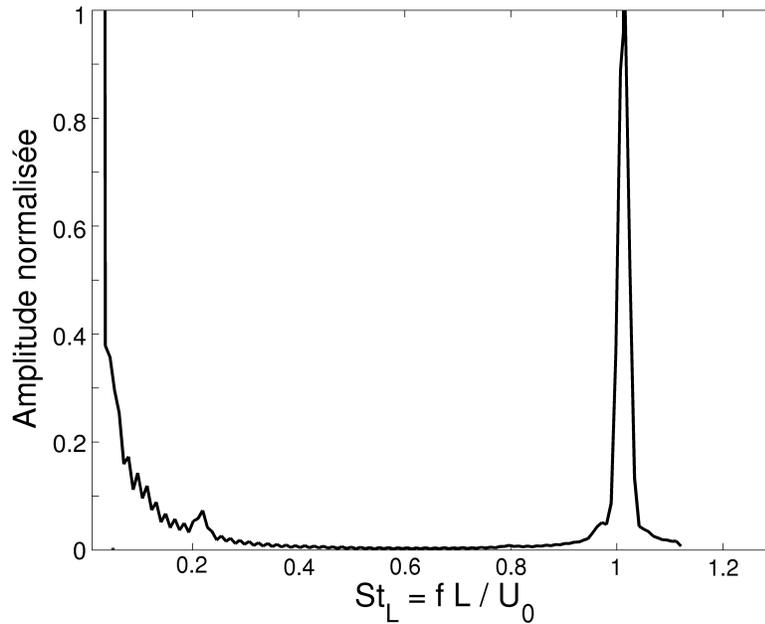


Figure 3.10 – Spectre de de Fourier, moyenné en espace, issu de données acquises par simulation numérique, pour la géométrie de cavité $R = 2$.

3.3 Qualification de la DMD Non-Uniforme sur l'écoulement de cavité

Après avoir validé la NU-DMD sur un écoulement synthétique en section 1.6.2, la NU-DMD est appliquée aux champs de vitesse de l'écoulement de cavité dans le régime présenté section 3.2.1.3. Une comparaison des fréquences identifiées par la DMD et la NU-DMD est présentée dans le tableau 3.1. Comme précédemment, l'algorithme DMD utilise les \tilde{N} premiers vecteurs de la base de données, quand la DMD non-uniforme utilise \tilde{N} vecteurs pris *au hasard* dans la base de données (comportant $N = 4096$ champs).

Tableau 3.1 – Nombre de Strouhal associé à la fréquence dominante identifiée en fonction de \tilde{N} , le nombre de champs utilisé.

| \tilde{N} | 12 | 28 | 38 | 65 | 90 | 200 | 500 | 1000 |
|-------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| DMD | 0.80 | 1.01 | 0.99 | 1.02 | 1.05 | 1.04 | 1.02 | 1.02 |
| NU-DMD | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 | 1.02 |

Avec moins de $\tilde{N} = 500$ champs, des fluctuations sur la fréquence identifiée par DMD persistent, contrairement à la NU-DMD qui identifie parfaitement la fréquence dominante. Dans le cas étudié, seulement $\tilde{N} = 12$ champs utilisés suffisent à identifier avec précision la fréquence ($St = 1.02$). Les modes dynamiques obtenus par NU-DMD sont présentés figure 3.11. On retrouve des structures spatiales comparables à celles obtenues par la DMD standard. Quand la quantité d'information (\tilde{N}) est faible, la qualité

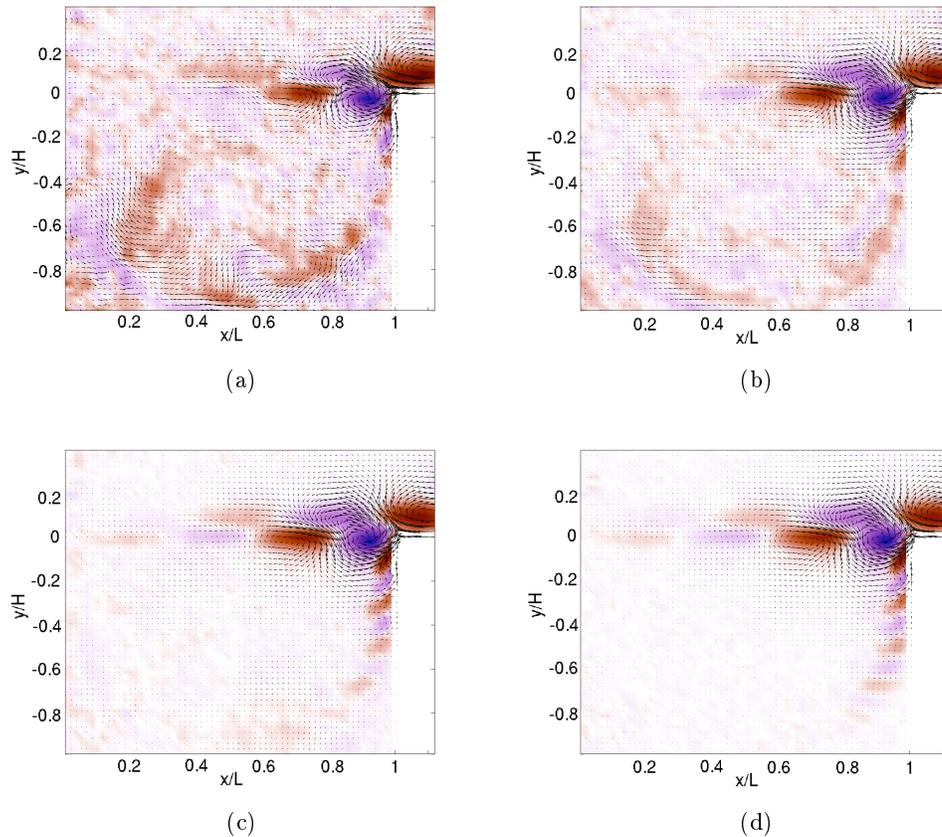


Figure 3.11 – (a)-(c) : Modes obtenus par NU-DMD, pour $N = \{12, 65, 500\}$. (d) DMD Mode obtenu pour $N = 500$

du mode se dégrade. Néanmoins, les structures principales restent nettement visibles, dès $\tilde{N} = 12$. Les structures tourbillonnaires de la couche cisillée sont bien capturées, y compris la longueur d’onde (voir tableau 3.2) ainsi que l’injection de vorticité dans la cavité.

Tableau 3.2 – Longueur d’onde du premier mode de couche cisillée, en fonction de \tilde{N} , le nombre de champs utilisé.

| Méthode | NU-DMD $\tilde{N} = 12$ | NU-DMD $\tilde{N} = 65$ | NU-DMD $\tilde{N} = 500$ | DMD $\tilde{N} = 500$ |
|---------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|-----------------------|
| λ_1/L | 0.50 | 0.50 | 0.49 | 0.49 |

La bonne convergence de la méthode dépend néanmoins du nombre de fréquences pertinentes de l’écoulement. Pour un grand nombre de fréquences dynamiquement importantes, la surface de réponse du problème de la minimisation (provenant du résidu de l’équation (1.79)) peut être extrêmement bosselée, comme le montre l’exemple de la figure 3.12(a). La convergence des algorithmes de minimisation est rendue délicate. L’expert doit alors prendre comme point de départ des conditions initiales proches des

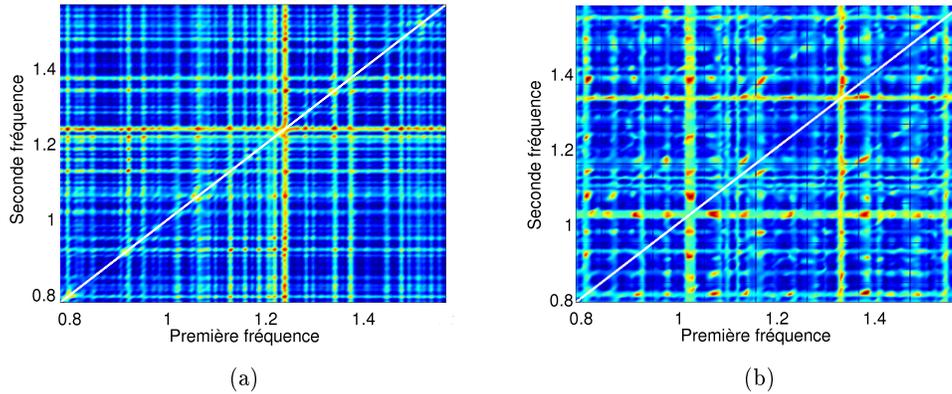


Figure 3.12 – Surface de réponse du problème de minimisation (c’est-à-dire le résidu, cf. équation (1.79), en fonction des fréquences) pour l’écoulement de cavité lorsque (a) : deux fréquences varient. (b) : deux fréquences varient et sept sont fixées.

fréquences attendues. Rechercher un plus grand nombre de modes (voir la figure 3.12(b), où sept fréquences supplémentaires sont *fixées*) permet également de lisser la surface de réponse.

En conclusion, lorsque l’acquisition de champs de données ne peut être uniforme dans le temps, la DMD Non-Uniforme peut permettre d’identifier les structures dominantes de l’écoulement, quand la décomposition en modes dynamiques ou une analyse de Fourier, échouerait. Seules quelques réalisations de l’observable semblent nécessaires pour que les structures émergent avec cette technique.

3.4 Qualification de l’éco-DMD

3.4.1 Identification modale

L’éco-DMD repose sur la bonne précision de l’estimation d’une matrice de Vandermonde, *i.e.* sur la qualité du spectre identifié ou des valeurs propres calculées. L’évolution du spectre en fonction du nombre de points conservés est présentée sur la figure 3.13. Comme attendu pour une méthode dérivée de l’algorithme DMD, même avec un petit nombre de points, le spectre est précisément identifié. Le bruit ne devient problématique que lorsque le nombre de points \tilde{n}_p conservés est proche du nombre de réalisations \tilde{N} .

La convergence en fréquence, en fonction du nombre de points conservés \tilde{n}_p et pour les deux fréquences principales du spectre, est présenté en figure 3.14. Même pour les plus petits ratios \tilde{n}_p/n_p , l’erreur relative est d’environ 1% sur la fréquence identifiée par une DMD standard, ce qui correspond à une imprécision sur l’identification du nombre de Strouhal d’environ 0.005. Cette précision est meilleure que les fréquences identifiées par analyse de Fourier : le pas minimum en fréquence (liée à l’échantillonnage des données) est, dans le cas présenté, supérieure à 0.01 en Strouhal.

L’identification est maintenant faite en conservant environ dix pour cent du nombre de points initiaux ($\tilde{n}_p = 1000$) contenus dans une mesure du champ de vitesse. Dès que le spectre est bien identifié, l’identification du mode spatial est elle-même de bonne qual-

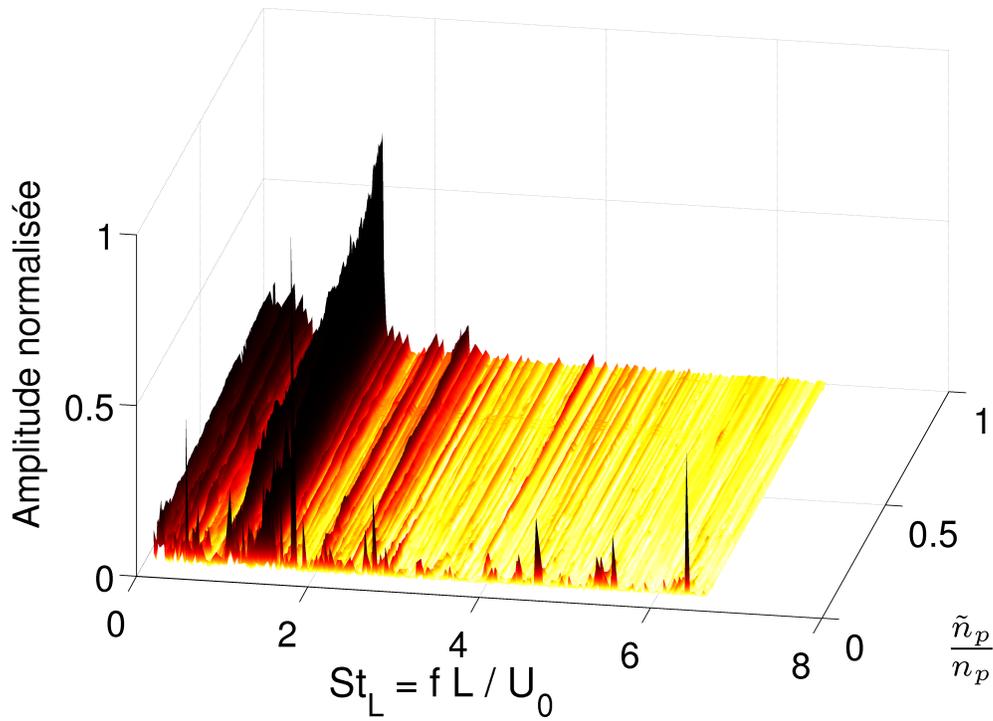


Figure 3.13 – Spectres en fonction du nombre d’observables conservées. Les observables conservées sont choisies aléatoirement.

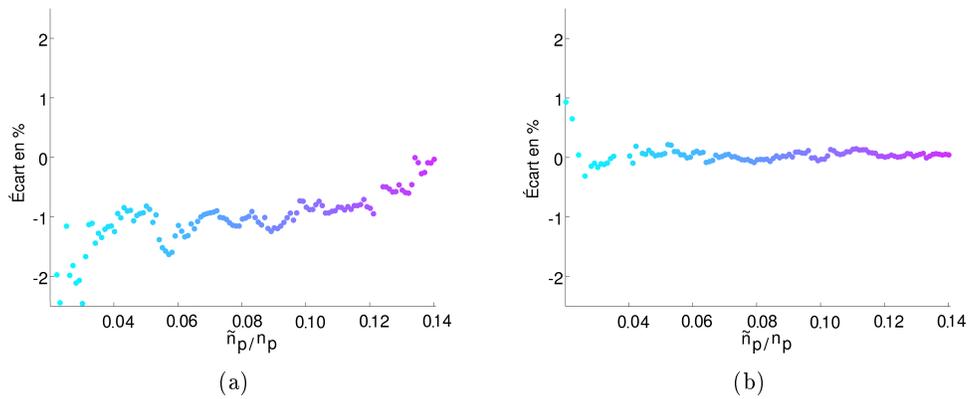


Figure 3.14 – Convergence des fréquences principales des modes de couche cisailée, en fonction du nombre de points \tilde{n}_p . (a) : pour le nombre de Strouhal $St_1 = 1.02$. (b) : pour le nombre de Strouhal $St_2 = 1.38$.

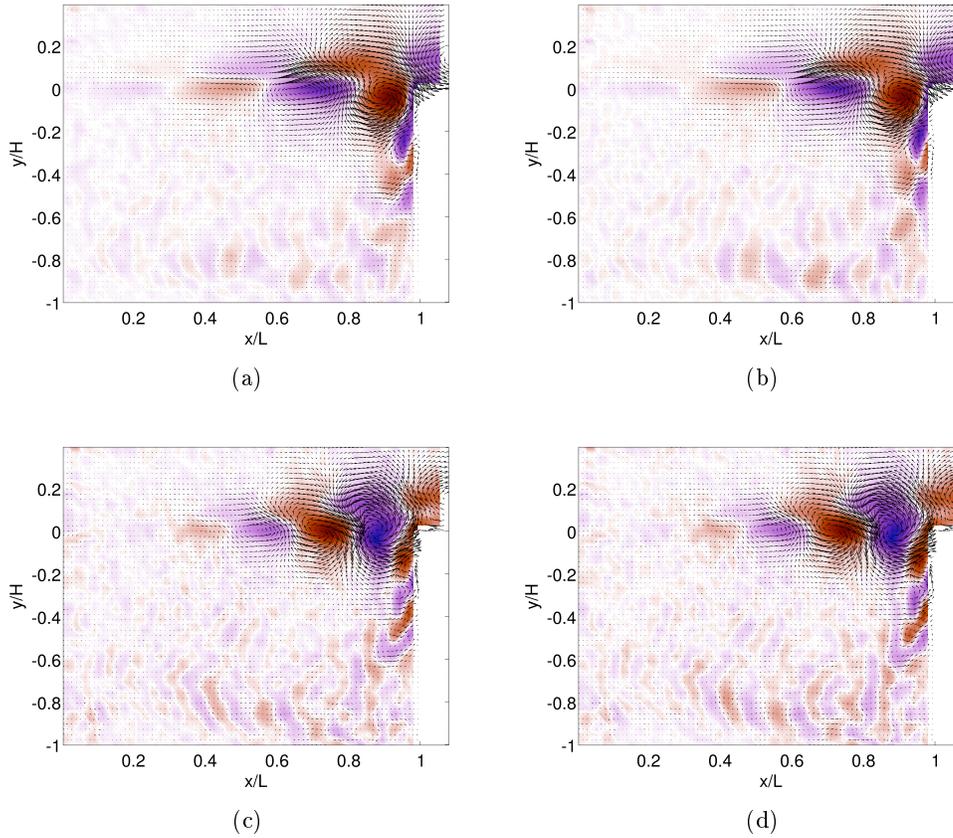


Figure 3.15 – Modes de couche cisailé identifiés. Le fond représente le champ de vorticité. Colonne de gauche : analyse DMD. Colonne de droite : analyse  co-DMD.

it . Dans la figure 3.15, les deux modes de couches cisillées sont précisément identifiés. L'imprécision dans l'identification des structures cohérentes repose sur une identification incorrecte des fréquences. Une exploration paramétrique de l'erreur due à l'identification des fréquences est présentée en figure 3.16. Une fréquence caractéristique est choisie – dans cette étude, celle associée au premier mode de couche cisillée. Sa valeur propre associée est modifiée, à fin de comparaison, avant la construction de la matrice de Vandermonde V . Les modes spatiaux M sont ensuite calculés par l'inversion de la matrice V : $M = K_1^N V^+$ (voir l'équation (1.80) de la section 1.4.3). La différence de norme \mathcal{L}_2 du mode associée à la fréquence modifiée par rapport à celle du mode original croît linéairement avec l'erreur en fréquence. La pente associée à cette dérive est de l'ordre de 5.10^{-2} .

3.5 Qualification de l'observabilité sur un écoulement

Dans le cas de l' co-DMD ou de la NU-DMD présentées précédemment, on peut supposer que sélectionner des points $\tilde{\mathbf{u}}$ (construisant ainsi une observable décimée, parmi l'observable \mathbf{u}) peu pertinents au sens de la dynamique amènera une identification in-

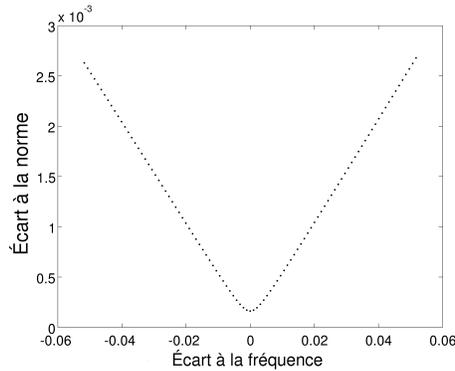


Figure 3.16 – Erreur relative (au sens de la norme \mathcal{L}_2) sur un mode en fonction de l’erreur relative en fréquence.

correcte des fréquences. A titre d’exemple, les fréquences de la couche cisailée sont très faiblement énergétiques au fond de la cavité [6]. Si les points considérés sont tous au fond de la cavité, les analyses ne pourront pas estimer correctement les fréquences de couche cisailée. L’identification de points ayant de bonnes propriétés d’observabilité est donc fondamentale, et la méthode présentée section 1.5 tente d’y apporter une réponse.

3.5.1 Comparaison avec une autre méthode empirique

Une autre méthode, la Singular Value Decomposition Observability (SVDO), pour quantifier les qualités d’observabilité d’une observable et ne nécessitant pas les équations du système dynamique, a été proposée par Aguirre et Letellier [1], *cf.* section 1.5.

On compare, figure 3.17, les deux méthodes sur l’écoulement de cavité dans le régime intermittent (voir la section 3.2.1.3 pour une présentation de ce cas).

Comme attendu, l’information est principalement présente dans la couche cisailée et le long de la paroi aval. Les fréquences de la couche cisailée sont d’amplitude faible au fond de la cavité, ce que révèle les deux méthodes (*cf.* figure 3.17(b)).

On note l’accord pour la détection des zones ayant de bonnes propriétés d’observabilité entre la SVDO et la DMDO, *cf.* figure 3.17. Les zones principales sont communes, notamment les régions où l’observabilité est bonne, *e.g.* l’injection près du mur aval, le coin impactant, et une partie de la recirculation centrée en $\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{H}\right) \approx (0.4, -0.8)$. Une autre zone est mise en relief, sous la couche cisailée, position $\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{H}\right) \approx (0.55, -0.2)$. Les zones correspondant à de mauvaises propriétés d’observabilité sont également communes, par exemple celle centrée sur $\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{H}\right) \approx (0.8, -0.4)$.

La figure 3.18 présente les points influents sur la dynamique pour deux points du champ. C’est une carte de connexité spatiale. La figure 3.18(a) présente le point \mathbf{x}_1 situé en $(x/L, y/L) \approx (1, 0)$, possédant de bonnes propriétés d’observabilité. Au contraire, la figure 3.18(b) présente la connexité spatiale du point \mathbf{x}_2 situé en $(x/L, y/L) \approx (0.15, -0.15)$, dont les propriétés d’observabilité, au sens de la DMDO, sont médiocres. Par définition, la connexité spatiale du premier point est largement plus importante que celle du second point. Le choix d’observable peut ainsi être encore amélioré en considérant

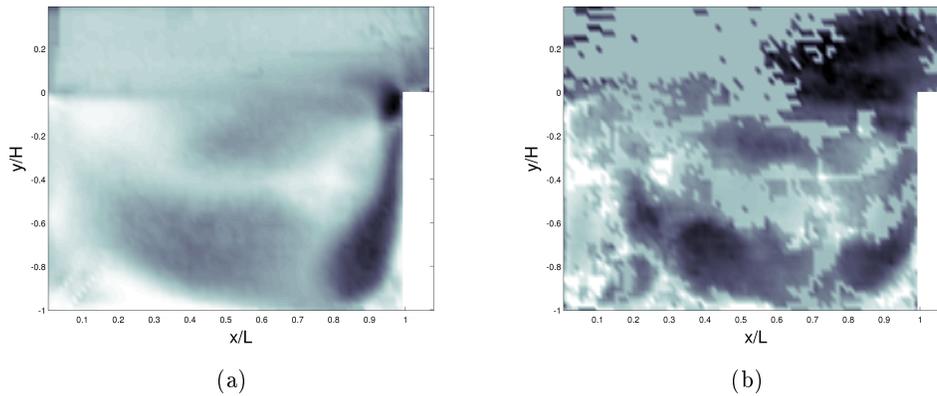


Figure 3.17 – Carte de la qualité d’observabilité des points. La couleur indique la qualité d’observabilité du point considéré, du noir pour des propriétés maximales au blanc pour les propriétés minimales. (a) : DMD-Observabilité. (b) : SVD-Observabilité.

cette connexité spatiale. Un point ayant une qualité d’observabilité σ_α proche de celle du point \mathbf{x}_1 aura vraisemblablement une connexité spatiale similaire, *i.e.* n’apportera que peu d’information supplémentaire. Choisir des points ayant une qualité σ_α importante *et* une connexité spatiale complémentaire permettrait une dégradation optimale du jeu de données.

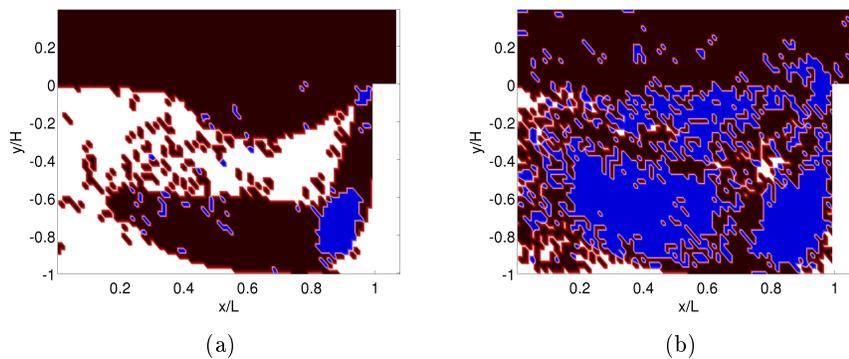


Figure 3.18 – Carte de la connexité spatiale pour différents points du champ. (a) : placé en $(x/L, y/L) \approx (1, 0)$, avec de bonnes propriétés d’observabilité. (b) : placé en $(x/L, y/L) \approx (0.15, -0.15)$, avec de médiocres propriétés d’observabilité. La couleur bleue indique un point dont l’importance est négligeable dans la dynamique de l’observable, le blanc un point dont une des composantes de la vitesse est importante dans la dynamique de l’observable. Enfin, la couleur rouge indique un point dont les deux composantes du vecteur vitesse sont des composantes importantes pour la dynamique de l’observable.

3.5.2 Estimation économique de la DMD-Observabilité

Dans le cas de grand jeu de données, ce qui est l'objet de l'éco-DMD, l'estimation de l'opérateur d'évolution A est hors de portée. Dans ce cas, la DMD ne peut pas être calculée au préalable pour l'estimation des qualités d'observabilité des points. Néanmoins, il est possible de vérifier *a posteriori* si les observables présélectionnées ont de bonnes qualités. Il est peu coûteux de contrôler la DMD-O des points choisis. Changer, en itérant ce processus, les points ayant les moins bonnes σ_α par de nouveaux, améliore la qualité de l'identification des fréquences. comme on peut le constater sur la figure 3.19(b).

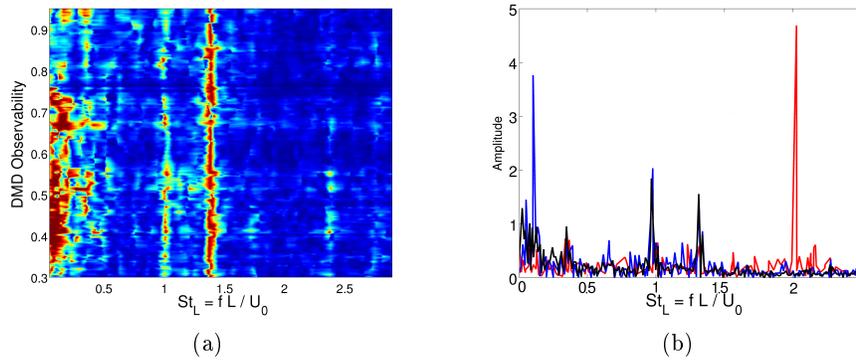


Figure 3.19 – (a) : Spectre en fonction de la qualité DMDO minimal des points conservés, pour une décimation importante du nombre de points : $\tilde{n}_p \approx \tilde{N}$, et $\left(\frac{\tilde{n}_p}{n_p}, \frac{\tilde{N}}{N}\right) \approx (0.06, 0.07)$. Les hautes et basses fréquences ne sont bien captées que pour des valeurs élevées du critère DMDO. (b) : Spectres extraits d'une éco-DMD, en bleu pour des observables ayant un critère DMDO important, et en rouge ayant un critère DMDO faible. La courbe noire est le spectre DMD réalisé sur la totalité des observables.

Une itération sur le choix des $\tilde{n}_p = 550$ points retenus a été réalisée, dans un cas pour améliorer la détection des fréquences (spectre bleu), dans l'autre cas pour dégrader cette estimation (spectre rouge). La décimation spatiale est très importante, avec seulement $\tilde{n}_p = 550$ observables conservées (avec $\tilde{n}_p/n_p \approx 0.06$). Le spectre rouge ne capte aucune des propriétés spectrales du jeu de données, tandis que le spectre bleu correspond bien au spectre noir (à l'exception d'une basse-fréquence sur-énergétique) issu d'une analyse DMD réalisée sur l'ensemble des points.

3.6 Décompositions modales sur un écoulement expérimental de cavité ouverte

Dans cette partie, nous comparons les résultats obtenus par deux décompositions modales, la décomposition en modes dynamiques et la décomposition orthogonale aux valeurs propres, sur un écoulement en régime intermittent. La pertinence des modes calculés sur des champs 2D est ensuite discutée par rapport à la structure réelle 3D de l'écoulement.

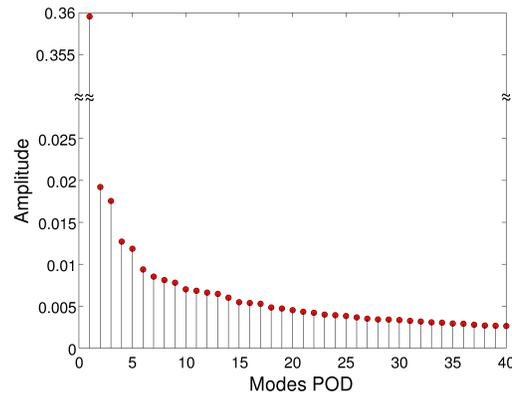


Figure 3.20 – Spectre des valeurs singulières obtenues par décomposition orthogonale aux valeurs propres sur les champs de vitesses de l'écoulement de cavité. L'amplitude est normalisée par la somme de toutes les valeurs singulières.

3.6.1 POD sur le jeu de données

La décomposition POD, présentée dans la section 1.1.1, a été réalisée sur le jeu de données présenté en section 3.2.1.3. Le spectre des valeurs singulières de la POD est présenté sur la figure 3.20. Les cinq premiers modes POD du spectre, dont les structures spatiales (*topos*) sont représentés en figure 3.21, collectent 42% de l'énergie totale. Le champ de vecteurs représente le champ de vitesse, tandis que le fond coloré représente le champ de vorticité. Le premier mode, figure 3.21(a), le plus énergétique au sens de la norme \mathcal{L}_2 , est très proche du champ moyen. Cependant, des petites oscillations du *chronos* associé (autour de la valeur moyenne 0.03, cf. figure 3.21(c)) montre que ce mode n'est pas exactement le mode moyen. Cette différence est une conséquence de l'orthogonalité des modes imposée par l'analyse POD. Comme attendu par des considérations énergétiques, les deuxième et troisième modes (figures 3.21(d) et 3.21(g)) exhibent des structures advectées dans la couche cisailée. Les quatrième et cinquième modes (figures 3.21(j) et 3.21(m)) sont des structures de l'écoulement intracavitaire, et correspondent effectivement dans les *chronos* associés à une dynamique de basses fréquences, cf. figures 3.21(k) et 3.21(n).

La POD n'identifie qu'une structure principale de la couche cisailée, à travers les *topos* ψ_2 et ψ_3 . Elle n'est donc pas capable de séparer les deux longueurs d'onde, présentes majoritairement dans la couche de mélange, comme le montre le spectrogramme de l'écoulement (cf. figure 3.22, provenant d'une analyse de Fourier glissante sur le *chronos* 2). Une analyse de Fourier des *chronos* associés aux modes POD de couche cisailée (figure 3.21(e)) montre que les deux fréquences sont bien présentes dans le spectre. L'intermittence y est néanmoins présente, cf. le spectrogramme 3.22. Elles ne sont en revanche pas distribuées sur des couples distincts de *topos*. La POD agit en pratique comme un filtre, rejetant les basses fréquences du spectre des *chronos* α_2 et α_3 . C'est en accord avec l'absence, dans les *topos* 2 et 3, de structures intracavitaires.

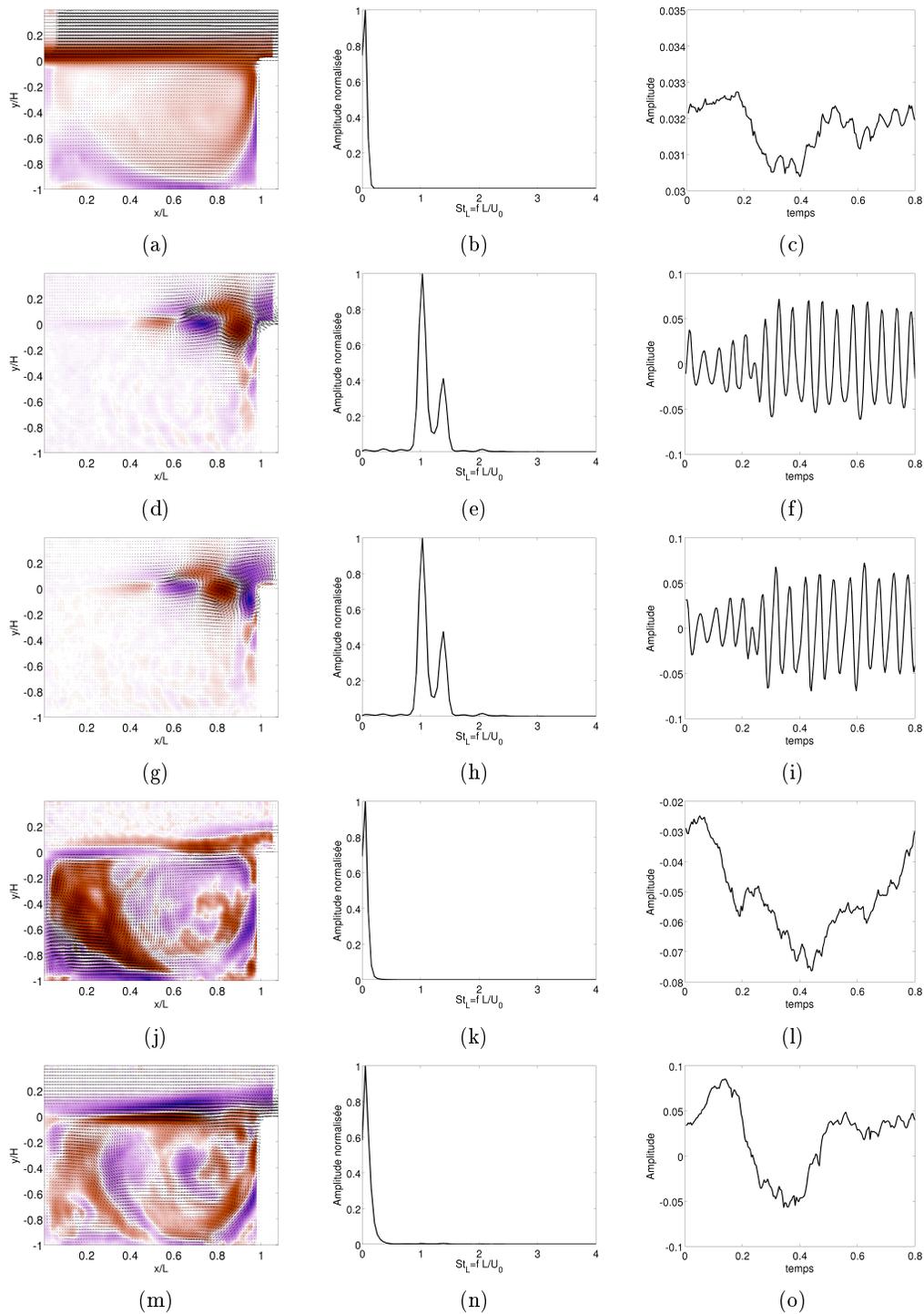


Figure 3.21 – De la première à la dernière ligne : modes POD n^o un à cinq. Colonne de gauche : *topos*. Le fond coloré représente le champ de vorticité. Colonne centrale : spectre de Fourier des POD chronos. Colonne de droite : *chronos*.

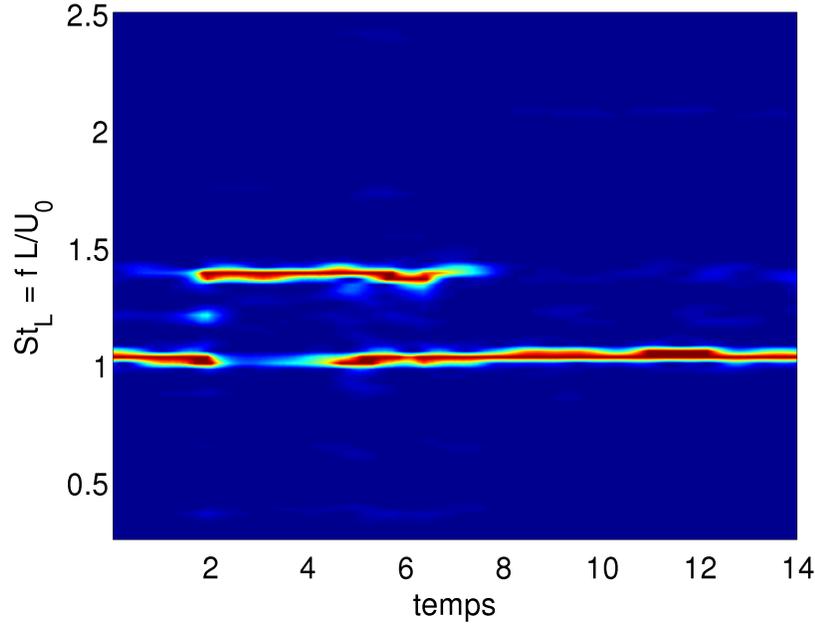


Figure 3.22 – Spectrogramme du chronos 2 . Il a été réalisé en faisant une FFT glissante (pas : 0.04s. Largeur : 2s). L'abscisse est normalisée par rapport à la fréquence du premier mode de couche cisailée (Strouhal $St_1 = 1.02$, correspondant à la fréquence de $f_1 = 19.6$ Hz).

Le développement des instabilités de la couche cisailée des topos (*e.g.* figure 3.21(d)) peut être caractérisée en ajustant les valeurs de vitesse, $\mathbf{v}(x, y_0)$, à une hauteur $y = y_0$ fixée, par le profil suivant :

$$\mathbf{v}_{th}(x) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \exp(\sigma x) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \zeta\right), \quad (3.4)$$

où λ représente la longueur d'onde de la structure, σ le taux de croissance spatiale, ζ la phase initiale et les \mathbf{v}_i sont des facteurs de renormalisation. L'identification des paramètres est plus robuste en considérant la composante de vitesse selon la direction \mathbf{e}_y .

Différentes altitudes ont été considérées pour l'ajustement du profil de l'équation (3.4), représenté sur la figure 3.23. La longueur d'onde calculée est $\lambda/L = 0.43 \pm 0.03$ pour tout à la fois les deuxième et troisième topos. Nous verrons en section 3.6.2 que cette longueur d'onde— et donc les *topos* associés —, n'est en réalité pas physique. On montrera que cette longueur d'onde est la moyenne pondérée des longueurs d'onde de chaque mode de couche cisailée existant durant le régime intermittent. C'est un comportement attendu, la POD détectant des événements corrélés dans les réalisations du champ. Or, les oscillations de la couche cisailée sont, quelque soit leur fréquence, spatialement très corrélées. Il n'est donc pas surprenant que la POD ne puisse les discerner.

La POD est néanmoins une décomposition exacte, *i.e.* la reconstruction d'une observable quelconque provenant du jeu de données doit être exacte. Comment la longueur d'onde du mode dominant s'ajuste-t-elle en fonction du temps à la fréquence instantanée

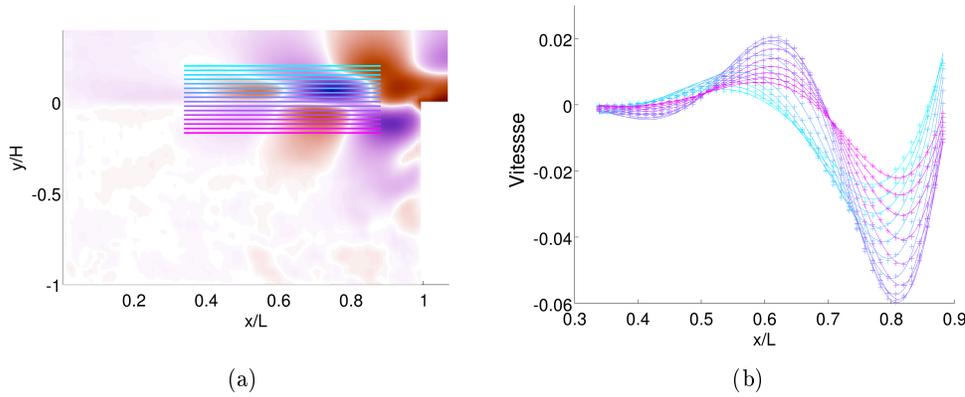


Figure 3.23 – Détermination des longueurs d’onde des structures tourbillonnaires de la couche cisailée. (a) : composante y de la vitesse du second *topos*. Les lignes extraites pour le calcul de longueur d’onde sont identifiées par leurs couleurs. (b) Un ajustement est réalisé entre le modèle (ligne pleine) et les données (croix), pour calculer la longueur d’onde des structures. Les couleurs renvoient aux lignes choisies sur la figure (a).

des oscillations de la couche cisailée ? Pour y répondre, considérons un champ de vitesse \mathbf{u}_{ROM} reconstruit à partir des modes 2 à 12 :

$$\mathbf{u}_{ROM}(\mathbf{r}, t_i) = \sum_{k=2}^{12} \alpha_k(t_i) \Phi_k(\mathbf{r}). \quad (3.5)$$

Le premier mode est omis, afin de faciliter le calcul de la longueur d’onde, dans la couche cisailée, des structures du champ \mathbf{u}_{ROM} . Cette longueur d’onde, pour des temps correspondant à des plages où une seule fréquence est présente, varie significativement. Par exemple, à $t_1 = 0.5$ s la fréquence d’oscillation présente dans la couche cisailée correspond à un Strouhal de 1.02. La longueur d’onde calculée est alors $\lambda/L = 0.50$. Pour un autre temps $t_2 = 4$ s, tel que la fréquence d’oscillation de la couche cisailée corresponde à un Strouhal de 1.38, la longueur d’onde identifiée devient $\lambda/L = 0.39$. Les *topos* des modes secondaires (les modes spatiaux POD 8 à 12, figures 3.24(a) à 3.24(m)) permettent donc l’adaptation des modes principaux à la longueur d’onde de l’écoulement. En suivant les mécanismes proposés par Basley [6], ils se doivent de posséder des structures couplant des tourbillons de la couche cisailée avec des structures de l’écoulement intracavitaires. Cette hypothèse est bien vérifiée dans les représentations des modes 3.24(a) à 3.24(m). Les spectres de *chronos* associés exhibent évidemment les deux fréquences caractéristiques des oscillations de la couche cisailée, nécessaires pour cette interaction, ainsi qu’un large spectre de basses fréquences. On peut donc intuitivement que les modes POD 8 à 12 jouent un rôle prépondérant dans l’adaptation de la longueur d’onde des structures de couche cisailée, comme proposé par Basley [6].

Ces modes sont aussi sans doute liés aux événements "extrêmes" qui se produisent épisodiquement dans la couche cisailée. De tels événements sont représentés en figure 3.25, avec un exemple lors de l’impact d’un tourbillon respectivement d’amplitude forte (figure 3.25(b)) et faible (figure 3.25(c)). L’intensité des *chronos* permet de détecter

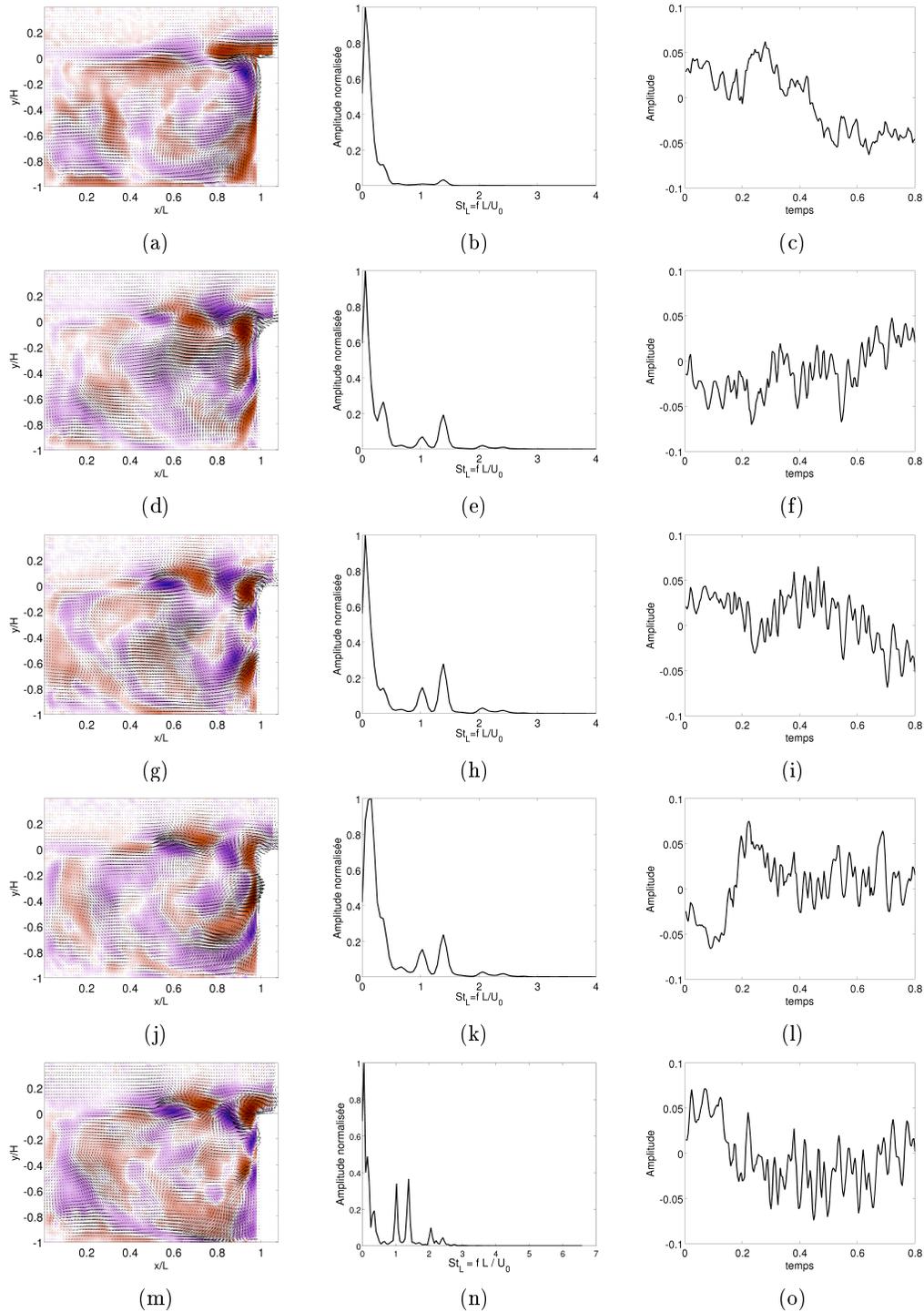


Figure 3.24 – De la première à la dernière ligne : modes POD n^o huit à douze. Colonne de gauche : *topos*. Le fond coloré représente le champ de vorticité. Colonne centrale : spectre de Fourier des POD chronos. Colonne de droite : *chronos*.

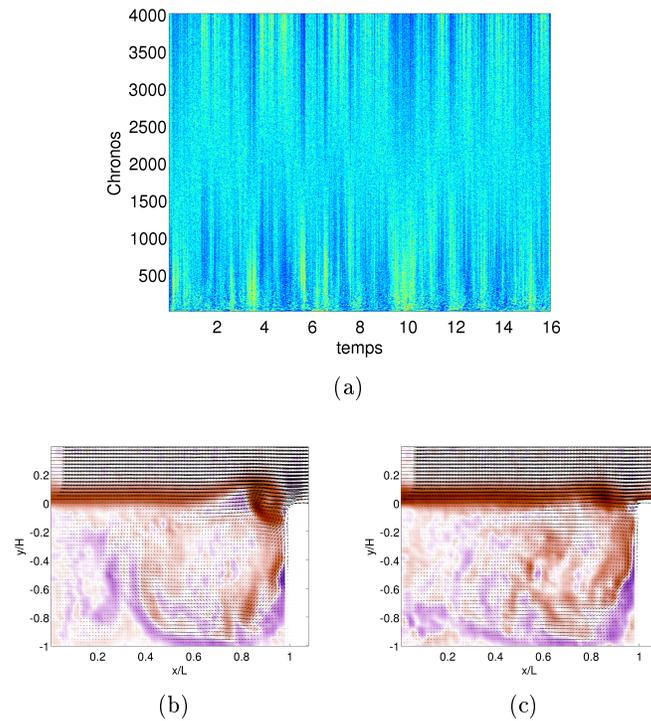


Figure 3.25 – (a) : Amplitude des chronos au cours du temps. Le bleu représente une faible amplitude, tandis que le rouge représente une amplitude importante. (b) et (c) : Champs de vitesse associés a une amplitude importante (temps $t = 9.26$ s) et faible (temps $t = 4.93$ s) pour les deux cents premiers chronos. Le fond coloré représente le champ de vorticité.

ces  v nements (*cf.* figure 3.25(a)). L’ v nement important se trouve par exemple, autour du temps $t \approx 10$ s, tandis que l’ v nement faible est aux alentours du temps $t \approx 5$ s. On peut remarquer que tous les *chronos* dans la gamme 2 à 2000 (soit la moitié des chronos) réagissent à ces phénomènes. L’amplitude des *chronos* complémentaires (correspondant aux modes de rang supérieur à 2500) réagissent en opposition. Cette réaction peut s’expliquer par le fait que le rapport signal sur bruit est plus fort lors d’ v nements intenses. Par conséquent, les derniers modes POD, dans lesquels le bruit est rejeté, sont plus faibles pour de tels  v nements. A contrario, lors d’ v nements peu intenses, le ratio signal sur bruit diminuant, l’amplitude de ces modes augmente. Ces  v nements ne semblent pas liés à l’intermittence et aux changements de fréquence dominante (*cf.* figure 3.26).

La décomposition orthogonale aux valeurs propres a des limites, révélées ici dans le cas particulier de l’intermittence. L’indication de la présence de deux fréquences dans le spectre a poussé à la recherche de deux phénomènes distincts dans la couche cisailée, *e.g.* deux longueurs d’ondes. Cette recherche n’est pas naturelle et est quelque peu empirique. Si elle est possible, la POD ne perdant pas d’information, il peut être utile d’utiliser une méthode complémentaire permettant de décrire de façon pertinente les phénomènes physiquement associées à des fréquences.

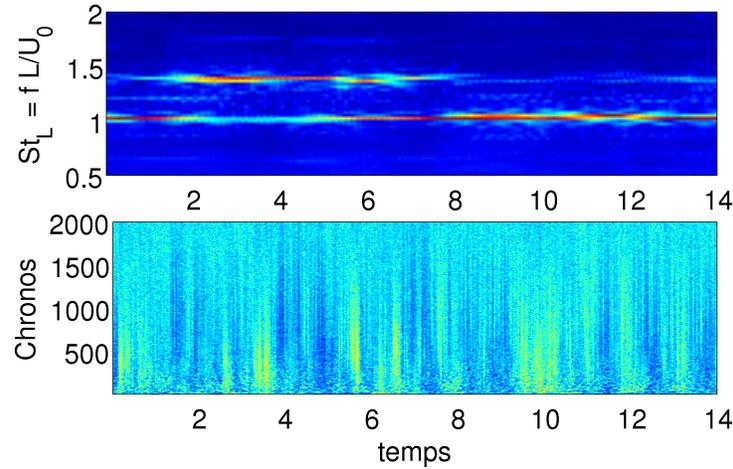


Figure 3.26 – Mise en comparaison du spectrogramme du jeu de données et de l’amplitude des premiers *chronos*.

3.6.2 Analyse DMD

La décomposition en modes dynamiques est appliquée à l’écoulement de cavité en régime intermittent déjà analysé par POD. Les valeurs propres identifiées sont représentées, dans le plan complexe, sur la figure 3.27(a). Comme attendu pour un régime saturé, les valeurs propres sont, pour leur majorité, situées sur le cercle unité. Les valeurs propres s’en éloignant sont des modes de bruits, évanescents. Il est à noter que ces valeurs propres sont systématiquement associées à des modes peu énergétiques.

On retrouve en fait, sur le spectre de la figure 3.27(b), que la dynamique s’organise autour des deux pics à haute fréquence, et de quelques basses fréquences. Les deux pics principaux correspondent aux fréquences à $St_1 = 1.02$ et $St_2 = 1.38$.

Les structures spatiales associées à ces Strouhal sont présentées figure 3.28 et correspondent bien aux modes de couche cisailée. Ces structures sont des ondes advectées dans la couche cisailée, d’où le décalage en phase de $\pi/2$ entre les parties imaginaires et réelles (illustré, par exemple, figure 3.28(a) et 3.28(b), pour le premier mode de couche cisailée au nombre de Strouhal $St_1 = 1.02$.

La même procédure que dans la section précédente 3.6.1 pour calculer la longueur d’onde associée à chaque mode dynamique de couche cisailée, est appliquée à ces modes de couche de mélange. Les longueurs d’onde sont respectivement $\lambda_1/L = 0.49$ et $\lambda_2/L = 0.38$ pour les modes dynamiques associés aux nombre de Strouhal respectivement St_1 et St_2 . Il est maintenant possible de comparer les longueurs d’ondes identifiées sur les modes DMD à celle du mode POD de couche cisailée. Une synthèse des résultats des longueurs d’onde des modes POD et DMD est présentée table 3.3 La conjoncture de la partie précédente est confirmée *a posteriori*. Les modes POD 8 à 12 permettent bien l’adaptation de la longueur d’onde de la couche de mélange entre les deux fréquences. Ces modes sont fortement structurés dans l’écoulement interne *et* dans la couche cisailée. Cela démontre également que le couplage entre les fréquences de la couche cisailée se fait via l’écoulement interne [6]. Les vitesses des ondes progressives de la couche cisailée sont respectivement $c_1/U = 0.50$ et $c_2/U = 0.52$, ce qui correspond aux valeurs attendues

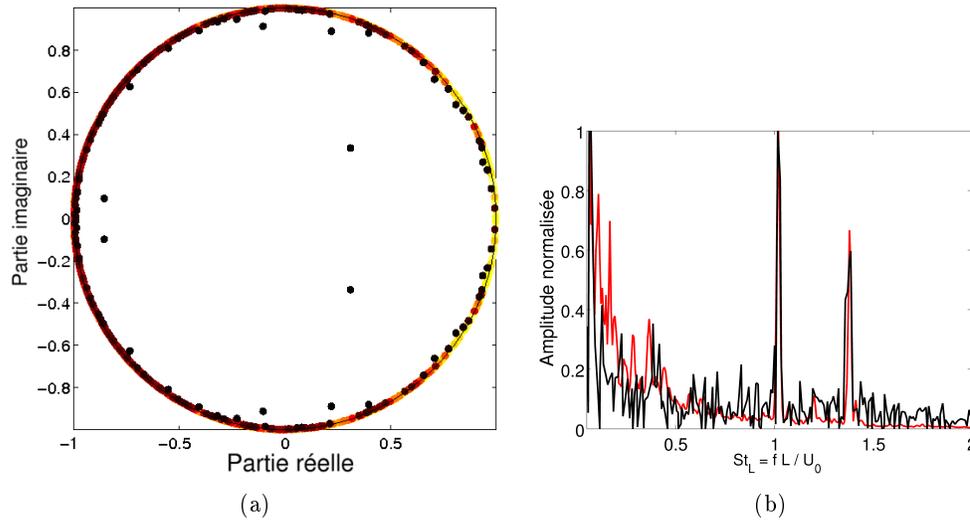


Figure 3.27 – (a) Valeurs propres DMD dans le plan complexe. Les couleurs sont proportionnelles à l’amplitude du mode correspondant, au sens de la norme \mathcal{L}^2 , du jaune pour les modes les plus énergétiques vers le marron pour les moins énergétiques. (b) Superposition du spectre de Fourier (rouge) et du spectre DMD (noir). Le spectre de Fourier est réalisé sur le champ de vitesse, en moyennant le spectre de puissance calculé en chaque point de la grille.

Tableau 3.3 – Comparaison des fréquences et des longueurs d’ondes pour une analyse POD et une analyse DMD

| | Strouhal | λ/L |
|-------------------------|----------|-----------------|
| mode dominant POD | 1.02 | 0.43 ± 0.03 |
| mode dynamique Φ_1 | 1.02 | 0.49 ± 0.03 |
| mode dynamique Φ_2 | 1.38 | 0.38 ± 0.02 |

pour des instabilités de Kelvin-Helmholtz dans des couches cisailées libres.

Il est intéressant de noter que la longueur d’onde du mode POD dominant est $\lambda_{POD}/L = 0.43$, car les longueurs d’onde apparaissent liées par la relation : $\lambda_{POD}/L \simeq \frac{\gamma_1 \lambda_1/L + \gamma_2 \lambda_2/L}{\gamma_1 + \gamma_2} = 0.44$, où $\gamma_1 = 1$ et $\gamma_2 = 0.67$ sont les amplitudes relatives des fréquences f_1 et f_2 du spectre de puissance 3.30. En pratique, la longueur d’onde λ_{POD} , représentée sur la figure 3.29 est ainsi la moyenne pondérée de λ_1 et λ_2 .

Les modes dynamiques associés aux Strouhal $St_L = 0.097$ et $St_L = 0.33$ sont présentés sur les figure 3.31. Ils montrent des structures liées à l’écoulement intra-cavitaire. Pour le mode à $St = 0.097$, les partie réelle et imaginaire sont en opposition de phase : il y a un battement dans l’écoulement. Cette fréquence n’est pas associée à une onde progressive. Le mode à $St = 0.33$, dont la fréquence correspond à la différence des fréquences entre les deux modes principaux de couche cisailée, est *a priori* issu de l’interaction non-linéaire entre ces deux modes. Les structures intra-cavitaire révélées par

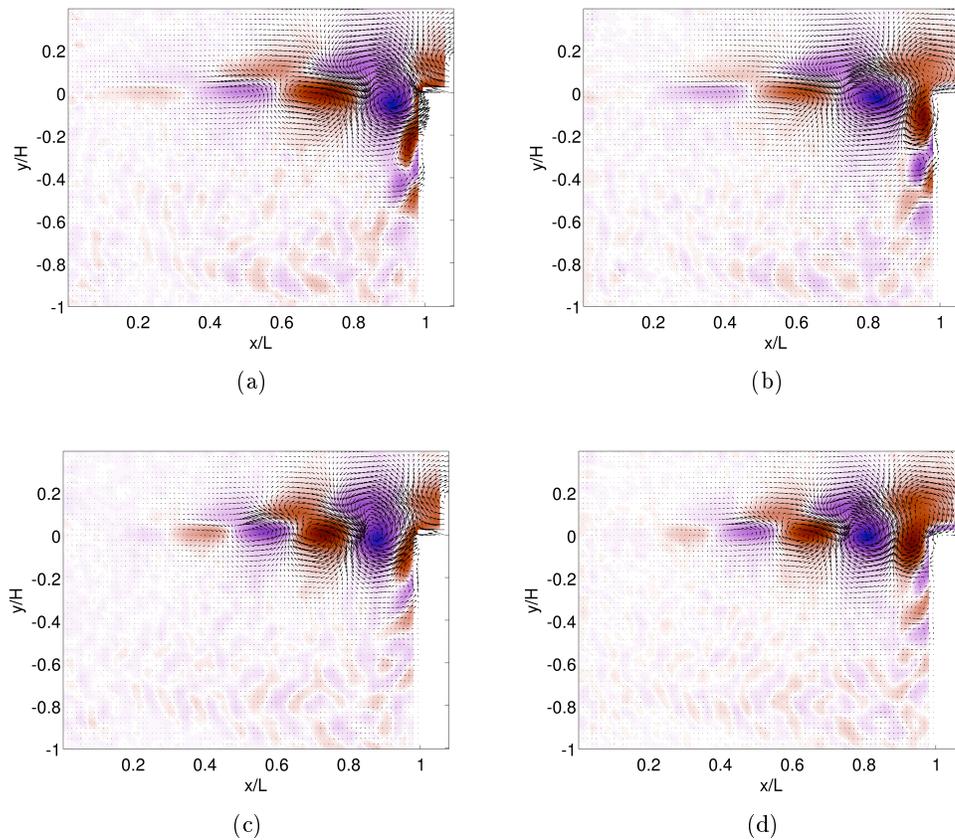


Figure 3.28 – Modes dynamiques α_k correspondant aux structures de couche cisailée. Le fond coloré représente le champ de vorticité. La première ligne correspond au Strouhal $St = 1.02$, la seconde au Strouhal $St = 1.38$. La colonne de gauche correspond aux parties réelles des modes, celle de droite aux parties imaginaires.

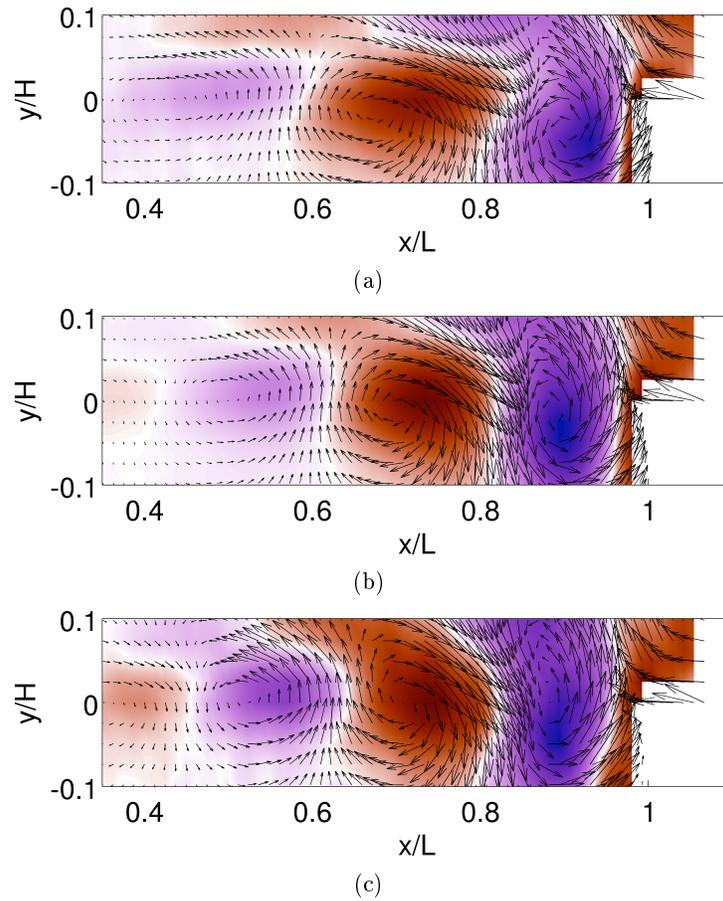


Figure 3.29 – Comparaison des structures de la couche cisillée, entre les modes dynamiques de la couche cisillée (figures (a–c)) et le mode POD principal (figure (b)). Le fond coloré est le champ de vorticité.

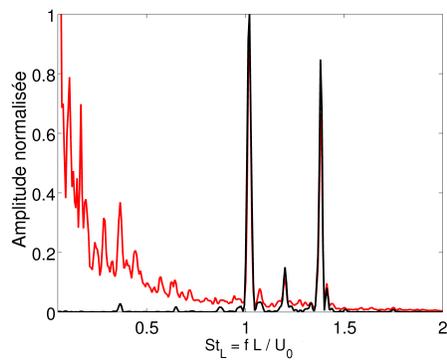


Figure 3.30 – Le spectre de Fourier du mode POD est comparé au spectre de Fourier du jeu de données moyenné sur le domaine spatial.

le mode permettent d'identifier un couplage entre les deux modes de couche cisailée via l'écoulement intra-cavitaire, qui va dans le sens des résultats de Basley [6].

La décomposition en modes dynamiques est efficace pour naturellement capter les modes et propriétés spectrales de l'écoulement, sans mélanger, comme pour la décomposition orthogonale aux valeurs propres, les fréquences de l'écoulement. L'intermittence peut néanmoins être captée, en faisant une DMD glissante sur les échantillons, et en utilisant peu de réalisations pour l'algorithme, afin que les jeux de données résultant représentent fidèlement l'écoulement. Le résultat, présenté figure 3.32. Il est parfaitement comparable au spectrogramme issu de la POD (*cf.* image 3.22).

3.6.3 Organisation 3D de l'écoulement

Nous avons jusqu'ici considéré des champs de données à deux dimensions, deux composantes. Des informations sur les variations de l'écoulement perpendiculaire au plan de mesures peuvent être obtenues. L'écoulement considéré étant incompressible, la divergence $\nabla \cdot \mathbf{u}$ doit être nulle partout dans l'écoulement. Si, dans le plan de mesure (xy) , la divergence restreinte au plan de mesure $\partial_x v_x + \partial_y v_y$ n'est pas nulle, on peut alors en déduire que $\partial_z v_z \neq 0$. Un écoulement transverse au plan existe donc.

Les modes dynamiques héritent des propriétés spatiales du champ de vitesse, comme démontré dans la section 1.3.2. Chaque mode doit donc respecter la condition de divergence nulle, en tout point. Dans le cas contraire, si la divergence n'est pas nulle dans un mode dynamique, comme pour le champ de vitesse, cela implique que la vitesse dans la direction transverse associée à ce mode n'est pas nulle. On peut considérer les modes dynamiques comme la moyenne des événements de l'écoulement se produisant à une fréquence donnée (par analogie avec une analyse de Fourier). Ainsi $\partial_z v_z \neq 0$ traduit l'existence statistique d'un écoulement transverse dans le champ de vitesse lui-même.

En pratique, l'utilisation de données expérimentales, bruitées, implique que la divergence n'est exactement nulle en aucun point. L'intensité du bruit peut néanmoins être quantifiée en identifiant une zone où la divergence est connue. L'écoulement dans la couche laminaire amont \mathcal{D}_{BL} est bi-dimensionnel. Il ne possède pas de gradient de vitesse transverse, la mesure de la divergence restreinte au plan \mathcal{D}_{BL} peut servir de calibration pour le zéro. La valeur moyenne de la divergence dans cette zone $\langle \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle_{BL} = \alpha_0$ donne la valeur de référence pour évaluer une valeur de la divergence à considérer comme différente de zéro. L'opérateur $\langle \cdot \rangle_{BL}$ décrit ici la moyenne spatiale dans le domaine \mathcal{D}_{BL} . Tout point du champ ayant une divergence significativement plus grande que ce seuil α_0 sera donc considéré à une divergence non-nulle, et, par conséquent, qu'il existe un écoulement transverse par ce point.

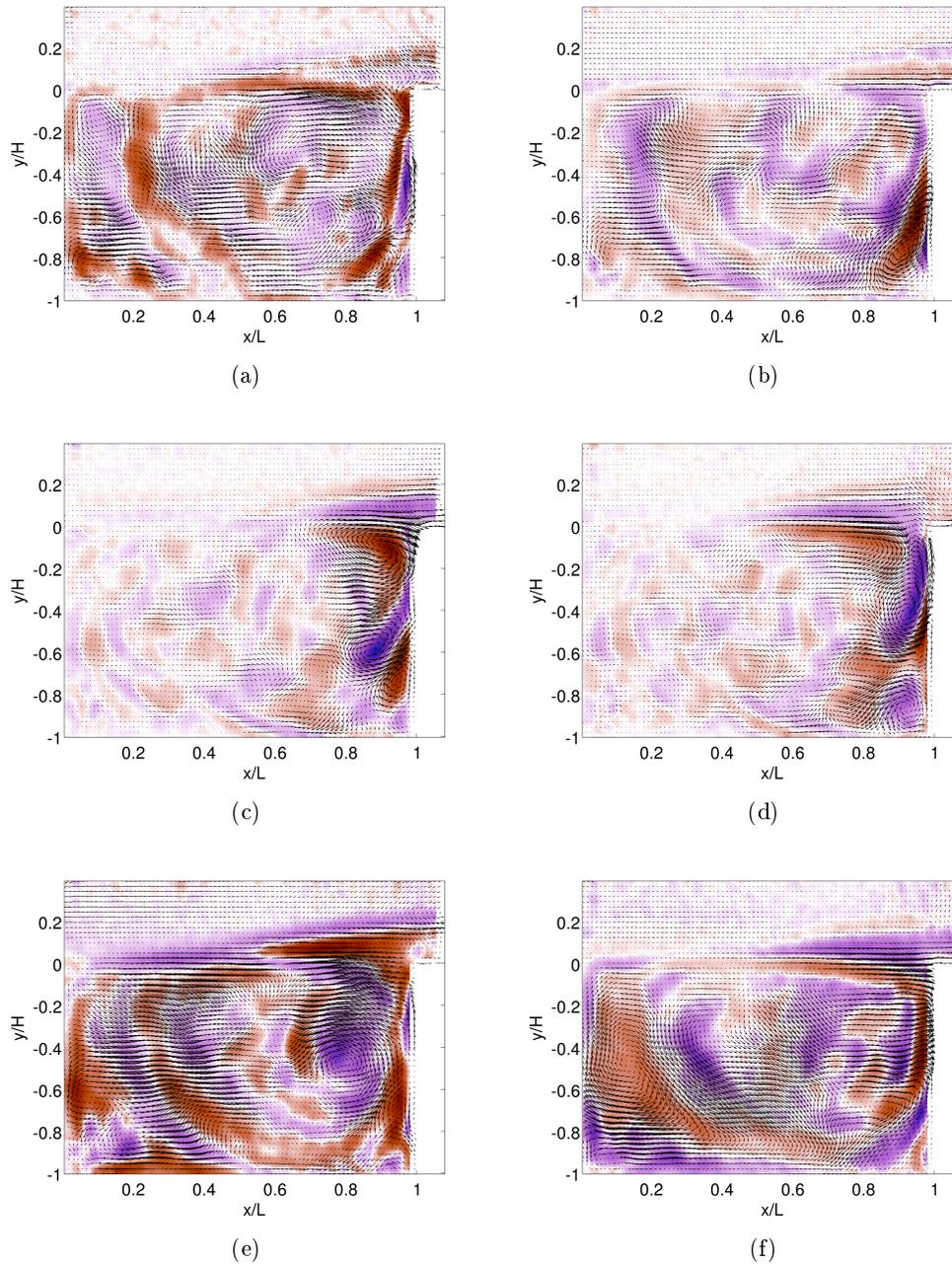


Figure 3.31 – Modes dynamiques α_k associé aux petits Strouhal. Le fond coloré représente le champ de vorticité. La première ligne correspond au Strouhal $St = 0.097$, la deuxième au Strouhal $St = 0.33$, et la dernière à $St = 0.028$. La colonne de gauche correspond aux parties réelles des modes, celle de droite aux parties imaginaires.

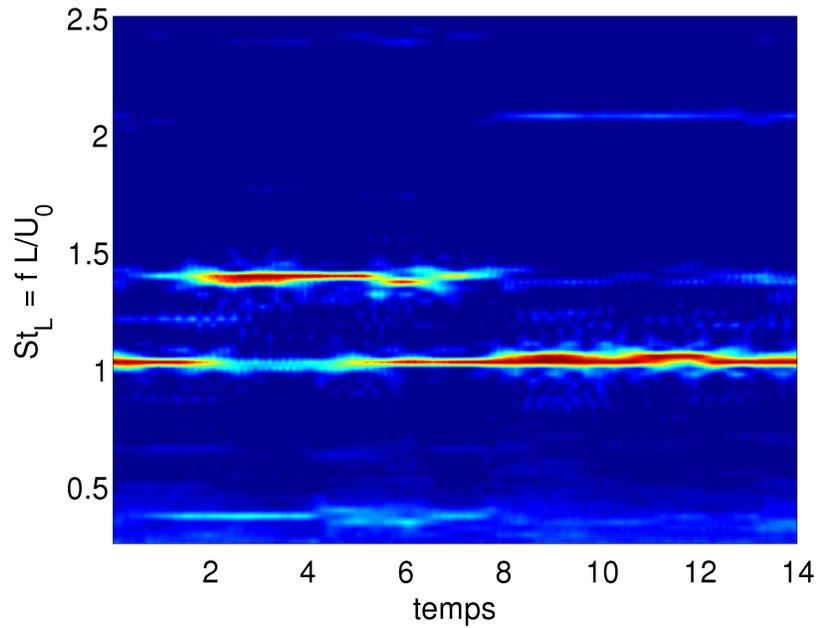


Figure 3.32 – Spectrogramme du champ de données. Il a été réalisé en faisant une DMD glissante (pas : 0.04s. Largeur : 2s). L'abscisse est normalisé par rapport à la fréquence du premier mode de couche cisailée (Strouhal $St_1 = 1.02$, correspondant à une fréquence de $f_1 = 19.6\text{Hz}$).

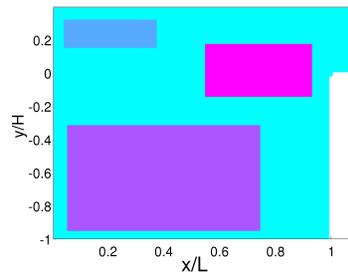


Figure 3.33 – Zones considérées dans l'étude de la divergence.

Les comparaisons des divergences et des seuils, pour les principaux modes dynamiques, sont synthétisées dans le tableau 3.4.

Tableau 3.4 – Les deux premières colonnes : amplitude de la divergence dans la couche cisailée, S_{SL} , et dans l’écoulement intracavitaire, S_{IN} , normalisées par le seuil à divergence nulle, α_0 . La dernière colonne est le ratio entre la divergence dans la couche cisailée sur la divergence dans l’écoulement interne. Les zones considérées sont présentées figure 3.33.

| Mode dynamique | St_L | S_{SL}/α_0 | s_{IN}/α_0 | S_{SL}/S_{IN} |
|----------------|--------|-------------------|-------------------|-----------------|
| Φ_5 | 0.028 | 3.4 | 5.7 | 0.6 |
| Φ_3 | 0.1 | 3.3 | 4.2 | 0.8 |
| Φ_4 | 0.3 | 3.5 | 3.6 | 1.0 |
| Φ_1 | 1.0 | 8.1 | 1.9 | 4.3 |
| Φ_2 | 1.4 | 11.9 | 1.7 | 7.1 |
| Φ_0 | 0 | 4.5 | 4.5 | 1.0 |

Les modes dynamiques associés aux oscillations de la couche cisailée (voir la figure 3.28) possèdent une divergence forte dans la couche cisailée. La comparaison entre les figures 3.31(a) et 3.34(a), révèle que le champ de divergence est intense où la vorticité est également forte. Le champ de divergence y est typiquement plus important d’un ordre de grandeur que le niveau de bruit α_0 . Ainsi, lorsque les structures sont cohérentes, la divergence y est non nulle. Il apparait que les structures de Kelvin-Helmholtz de la couche cisailée sont structur es dans la direction transverse.

Les tourbillons de la couche cisailée, détectés par les modes dynamiques Φ_1 et Φ_2 sont donc non uniformes dans la direction transverse. Cependant, en faisant cette étude sur des champs bidimensionnels, il est impossible de conclure si ces modulations sont périodiques dans la direction transverse ou seulement localisées. Des modulations transverses des ondes progressives de la couche cisailée ont déjà été notées dans des études expérimentales sur la cavité ouverte. Neary & Stephanoff [130] ont rapport  des régimes ayant deux fréquences dans le spectre de puissance. Ils ont associé ce second pic à des modulations de la couche cisailée. Basley [6] a étudié le couplage entre l’écoulement interne périodiquement structuré dans la direction transverse, et les oscillations de la couche cisailée. Les instabilités centrifuges induites par la courbure de l’écoulement de recirculation peuvent soit conduire à des structures tourbillonnaires de type Taylor-Goertler stationnaires, de longueur d’onde transverse $\lambda \approx 2D$, soit à des ondes progressives, selon le choix des paramètres de contrôle [16, 6, 123]. Les structures tourbillonnaires, intracavitaire, distribuées dans la direction transverse de la cavité pourraient être responsables de la forte divergence de la vitesse de ces structures observées dans le plan vertical.

Les nombres de Strouhal associés, basés sur H , sont typiquement compris entre 0 et 0.05.

Les champs de divergence des deux modes dynamiques principaux associés aux nombres de Strouhal $St_L = 2St_H = 0.044$ et $St_L = 2St_H = 0.184$ sont représentés en figure 3.35. La divergence est non nulle partout dans l’écoulement. Un écoulement transverse est présent en tout point de l’écoulement.

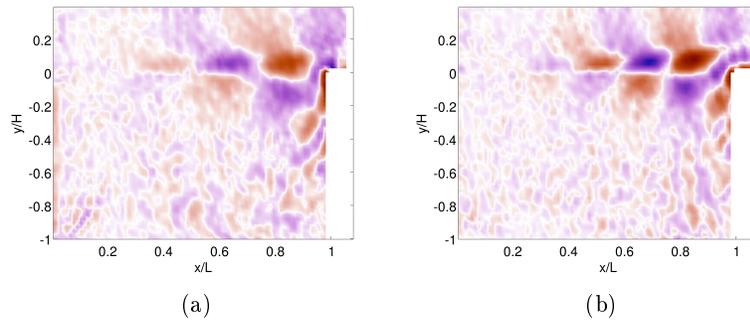


Figure 3.34 – Divergence des modes associés aux oscillations de la couche cisailée. (a) $St = 1.02$. (b) $St = 1.38$.

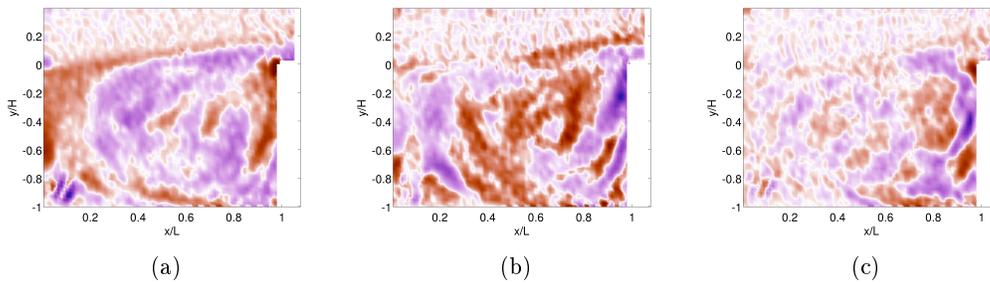


Figure 3.35 – Divergence des modes associés aux Strouhal (a) $St = 0$. (b) $St = 0.044$. (c) $St = 0.184$.

Finalement, le champ de divergence du mode Φ_0 associé au nombre de Strouhal nul, Φ_0 , est représenté sur la figure 3.36. Ce mode est très similaire, mais pas identique, au champ moyen de l'ensemble considéré. Néanmoins, le mode moyen est plus lisse, ce que l'on attend d'un champ provenant d'un filtre passe-bas. La composante permanente d'un écoulement transverse est clairement présente, comme le suggère la significative composante $\partial_z v_z$ présente dans le champ. L'écoulement moyen se structure vraisemblablement autour d'écoulements secondaires transverses de grande échelle. Dans le cas présent, le nombre de structures de type Taylor-Goertler, passées à travers le plan vertical sur la fenêtre d'observation, n'est peut-être pas suffisamment élevé pour annuler leur contribution cumulée. Il ne peut donc pas être exclu que le champ de divergence révèle encore la trace du passage des structures de Taylor-Goertler.

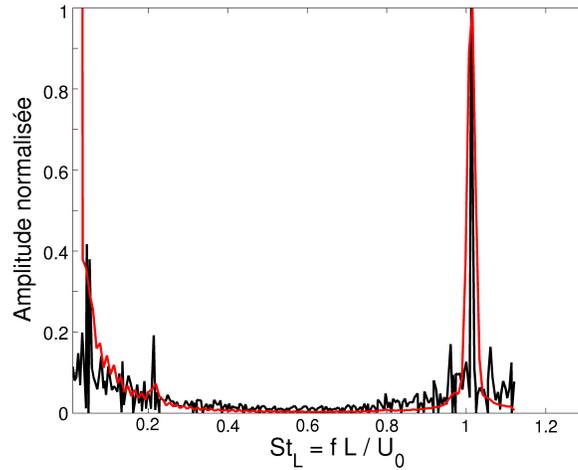
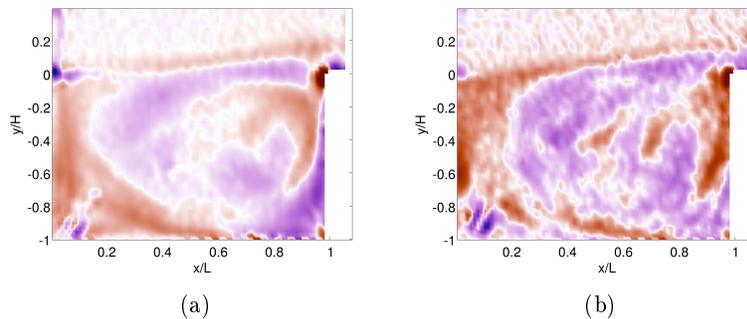


Figure 3.37 – Spectre DMD (noir) et de Fourier (rouge) des données DNS.

Figure 3.36 – (a) Divergence du champ moyen. (b) Divergence du mode dynamique à Strouhal $St = 0$.

3.6.4 Validation sur des données DNS 3D

Nous nous intéressons maintenant aux modes dynamiques 3D de l'écoulement de cavité simulé numériquement (*cf.* section 3.2.2). Les modes sont déterminés à partir de l'algorithme d'éco-DMD, présenté dans la section 1.4.3. Dans les conditions de l'expérience, un seul mode de couche cisailée est présent, comme le confirme le spectre de la figure 3.37.

Le spectre 3.37 montre que la DMD est capable d'extraire des fréquences précises dans les basses fréquences. Le spectre de Fourier (rouge), moyenné sur toutes les composantes v_x , v_y et v_z de l'observable, écrase ces composantes basses fréquences. Le mode associé au nombre de Strouhal 1 est bien un mode de couche cisailée (*cf.* figures 3.38)¹, de longueur d'onde $\lambda/L = 0.46$.

La figure 3.38, représentant des isosurfaces de la composante transverse de la vitesse, montre que les modes de couche cisailée sont bien structurés dans la direction transverse.

1. Par soucis de visibilité, seul un tiers de l'envergure – $z/H \in [2, 4]$ – est représenté dans les visualisations 3D.

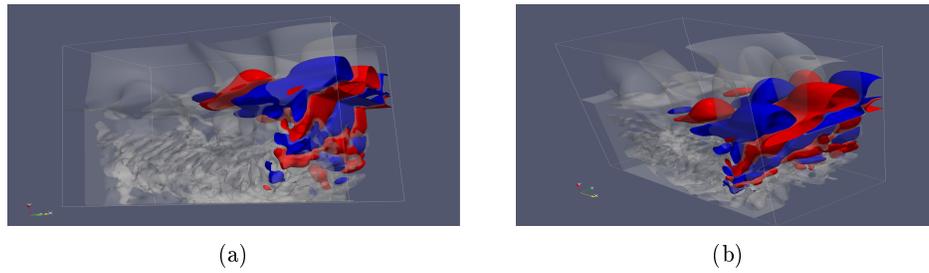


Figure 3.38 – Mode dynamique de couche cisillée associé à un nombre de Strouhal de 1. (a) Vue gauche du mode dynamique (partie réelle) de couche cisillée. (b) Vue du dessus du mode (partie réelle) de couche cisillée. Les couleurs représentent des isosurfaces nulles (blanc) négatives (bleu) et positives (rouge) de la composante transverse du champ de vitesse.

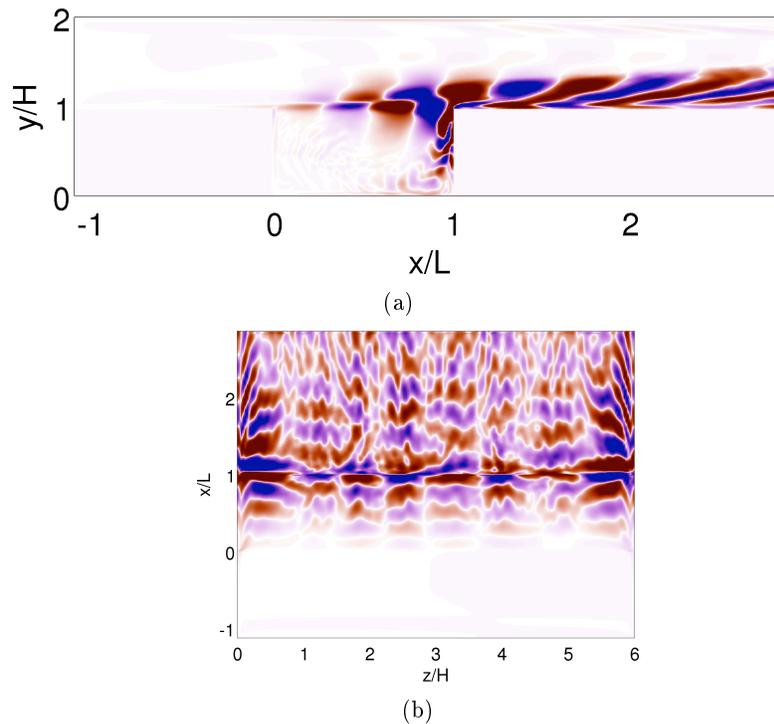


Figure 3.39 – Champ de vorticité du mode dynamique, de couche cisillée, associé à un nombre de Strouhal de 1.02. (a) : plan (x, y) , pour $z/H = 1$, du mode de couche cisillée. (b) : plan (x, z) pour $y/H = 0$.

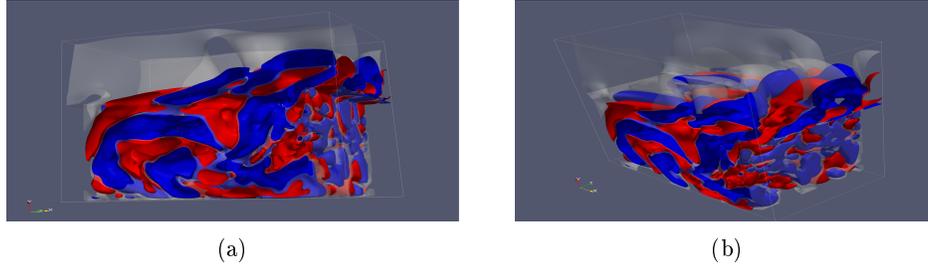


Figure 3.40 – (a) : Vue gauche du mode dynamique (partie réelle) associé à un Strouhal $St_L = 2St_D = 0.21$. (b) : Vue du dessus du mode (partie réelle). Les couleurs représentent des isosurfaces nulles (blanc) négatives (bleu) et positives (rouge) de la composante transverse du champ de vitesse.

Les coupes selon les plans (x, y) et (x, z) sont illustrées figure 3.39. La similarité avec les modes 2D (voir par exemple la figure 3.34(a), représentant la divergence du mode DMD à un Strouhal de 1.02) est frappante. Les zones d’injection de vorticité et les tourbillons de la couche cisailée semblent parfaitement en accord avec les structures révélées dans les modes 2D issus de champs expérimentaux présentés dans les parties précédentes. La longueur d’onde transverse, délicate à estimer, est de l’ordre $\lambda/H \approx 1$. La décomposition en modes dynamiques capte bien que la composante de la vitesse v_z , selon l’envergure, est quasiment d’un ordre de grandeur plus faible que les autres composantes de la vitesse v_x et v_y (cf. le tableau 3.5).

Tableau 3.5 – Moyennes des composantes de vitesse v_x, v_z le long de l’axe $(x/L, y/H) = (0.9, 0)$, adimensionnées par la moyenne de v_y

| composante | $\langle v_x \rangle / \langle v_y \rangle$ | $\langle v_z \rangle / \langle v_y \rangle$ |
|----------------|---|---|
| valeur moyenne | 0.63 ± 0.16 | 0.19 ± 0.10 |

Le principal mode basse fréquence, associé à un Strouhal $St_L = 2St_D = 0.215$, est un mode d’écoulement intra-cavitaire, comme on peut le voir figures 3.40. Il est très fortement 3D, et arbore des structures à la fois dans la cavité et dans la couche cisailée. Les coupes selon les plans (x, y) et (x, z) sont illustrés figure 3.41.

Le mode très basse fréquence, associé à un nombre de Strouhal $St_L = 2St_D = 0.045$, semble être une modulation du champ moyen. Les coupes selon les plans (x, y) et (x, z) sont illustrées figure 3.43. On peut noter la similitude avec le champ de divergence du mode moyen expérimental (cf. figures 3.36(b) et 3.35(b)).

Bilan de l’analyse modale sur l’écoulement de cavité

La section précédente a permis, au travers de l’analyse modale de champs de vitesses expérimentaux et numériques issus de l’écoulement de cavité, de mieux appréhender la structure 3D de cet écoulement. Particulièrement, l’analyse de champs bi-dimensionnels permet l’identification d’une partie des phénomènes 3D survenant dans l’écoulement. Des interactions entre l’écoulement interne et les oscillations de la couche cisailée résultent

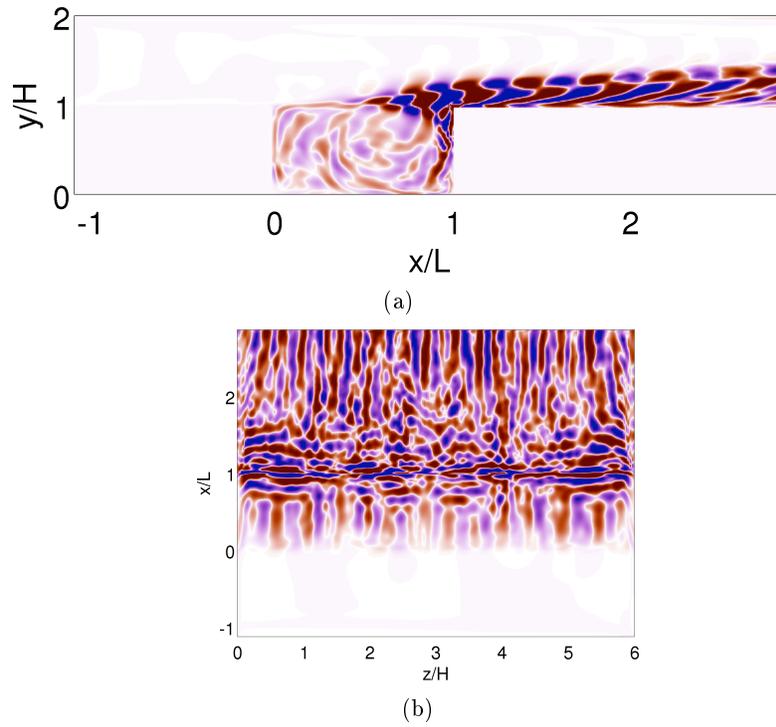


Figure 3.41 – Champ de vorticité du mode dynamique (partie réelle) associé à un nombre de Strouhal $St_L = 2St_D = 0.21$. (a) : plan (x, y) , pour $z/H = 1$, du mode dynamique (b) : plan (x, z) pour $y/H = 0$.

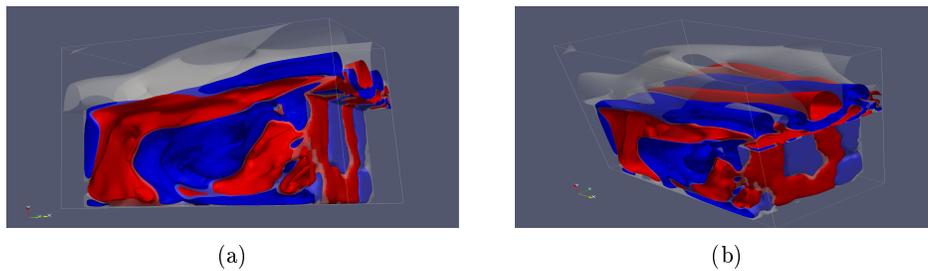


Figure 3.42 – (a) Vue gauche du mode dynamique (partie réelle) associé à un Strouhal de $St_L = 2St_D = 0.045$. (b) Vue du dessus du mode dynamique (partie réelle). Les couleurs représentent des isosurfaces nulles (blanc) négatives (bleu) et positives (rouge) de la composante transverse du champ de vitesse.

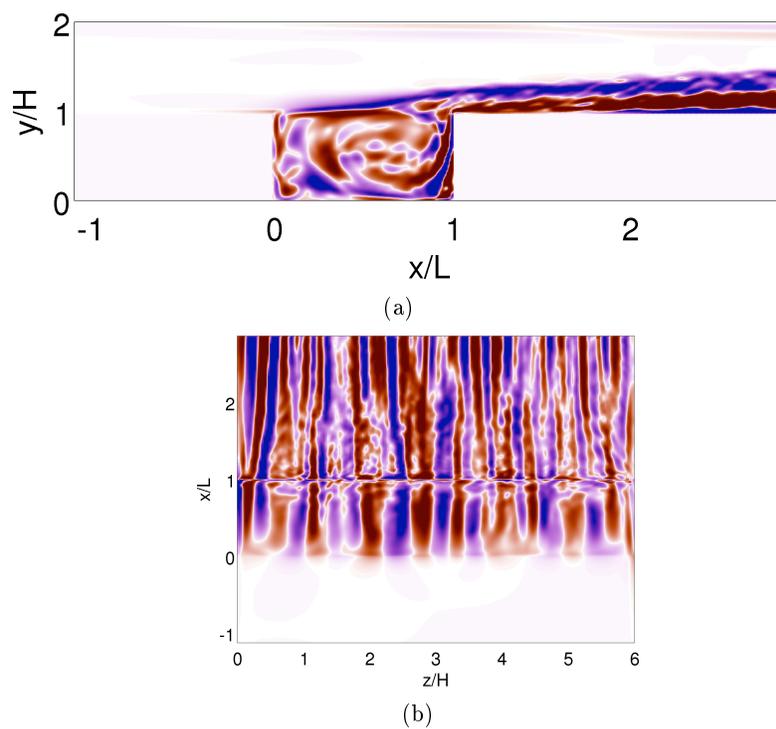


Figure 3.43 – Champ de vorticité du mode dynamique (partie réelle) associé à un nombre de Strouhal $St_L = 2St_D = 0.045$. (a) : plan (x, y) , pour $z/H = 1$. (b) : plan (x, z) pour $y/H = 0$.

des structures cohérentes de couplages, révélées par les analyses modales. La compréhension de la dynamique de l'écoulement de cavité reste parcellaire. Par exemple, l'injection de fumée et la dynamique des échanges entre la cavité et l'écoulement externe, que l'on devine sur la figure 3.1 de visualisation par fumée, ne sont pas à portée de ces analyses. Une analyse des structures lagrangiennes permet un éclairage plus poussé de ces questions, et fait l'objet de la section suivante.

3.7 Structures cohérentes lagrangiennes de l'écoulement de cavité

3.7.1 Analyse des structures lagrangiennes issues de mesures expérimentales 2D

On s'intéresse ici à l'écoulement de cavité sans intermittence, avec le rapport de forme $R = L/H = 1.5$ (l'écoulement est présenté section 3.2.1.2).

L'horizon est fixé à $T = 0.08$ s, soit 20 champs successifs de vitesse. Ce choix permet de développer pleinement le champ des exposants de Lyapunov à temps fini. Un temps horizon plus long amène un feuilletage qui rend la lecture des champs de FTLE beaucoup plus difficiles. Pour des horizons temporels plus courts, les structures ne sont encore qu'embryonnaires.

Quelques champs sont présentés figure 3.44, pour un cycle complet de naissance de l'instabilité en amont de la cavité puis d'impact tourbillonnaire sur le coin aval. Les lignes bleues représentent les crêtes du champ d'exposants de Lyapunov à temps fini calculés pour un horizon négatif, et correspondent donc à des structures lagrangiennes cohérentes convergentes. Les lignes rouges représentent les crêtes du champ de FTLE, calculées pour un horizon positif. Elles correspondent aux structures cohérentes lagrangiennes instables.

Les structures attractives (crêtes bleues) sont plus résilientes en espace que les structures cohérentes lagrangiennes répulsives (lignes rouges). Il est net, figure 3.44, que les structures cohérentes lagrangiennes instables sont guidées le long des LCS stables jusqu'au coin aval, dans la couche cisailée, lors de l'impact d'un tourbillon. Les LCS attractives proches de la couche cisailée bougent peu avant de s'enrouler au moment de l'impact. C'est principalement la LCS répulsive qui s'enroule lors de la formation du tourbillon. Sur les figures 3.45, on remarque que les crêtes du champs d'exposants de Lyapunov à temps fini, principalement dans la cavité, ne coïncident pas parfaitement avec le champ de vorticité au niveau de la couche cisailée. Les LCS forment une barrière entre les écoulements externe et intra-cavitaire. Par contre, au moment de l'impact, le centre de l'enroulement des LCS et le centre des tourbillons coïncident jusqu'à l'injection de vorticité dans la cavité. De même, les deux grandes recirculations visibles dans le champ de vorticité correspondent exactement aux deux recirculations délimités par les LCS.

On retrouve cette barrière matérielle, sur le plan affleurant de la cavité, lors de la visualisation par injection de fumée. Il faut attendre un temps long, comparativement aux temps caractéristiques de l'écoulement, pour que la cavité se remplisse de fumée. Il y a donc peu d'échanges entre l'écoulement extérieur et l'écoulement intérieur. Néanmoins, lors de visualisation de fumée, par exemple figure 3.47, la fumée provient bien de l'écoulement extérieur.

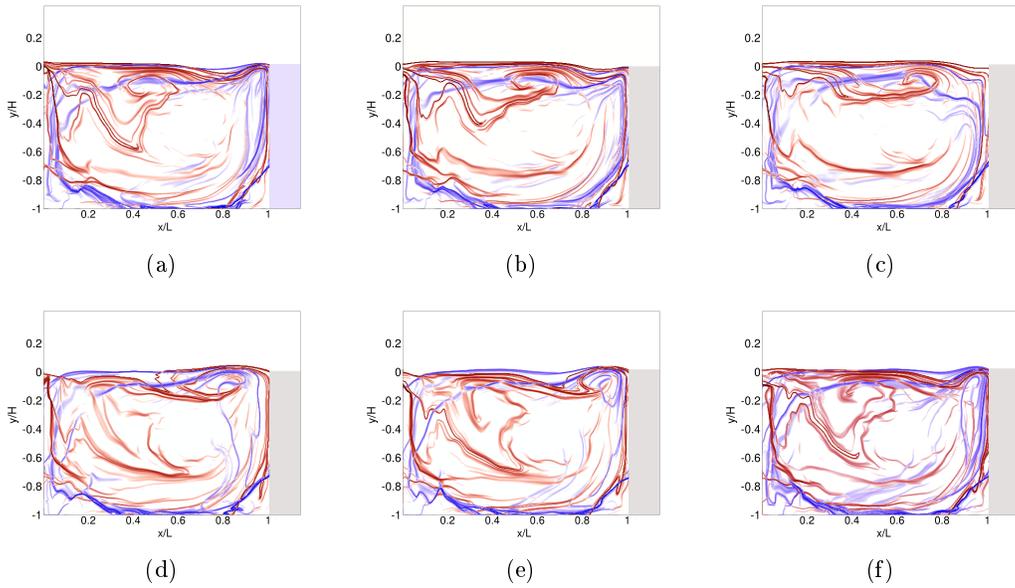


Figure 3.44 – (a)-(f) Crêtes du champ de FTLE (temps positif en rouge, temps négatif en bleu) pour un cycle complet d’impact de tourbillon de couche cisailée, entre $t = 3.000s$ et $t = 3.044s$.

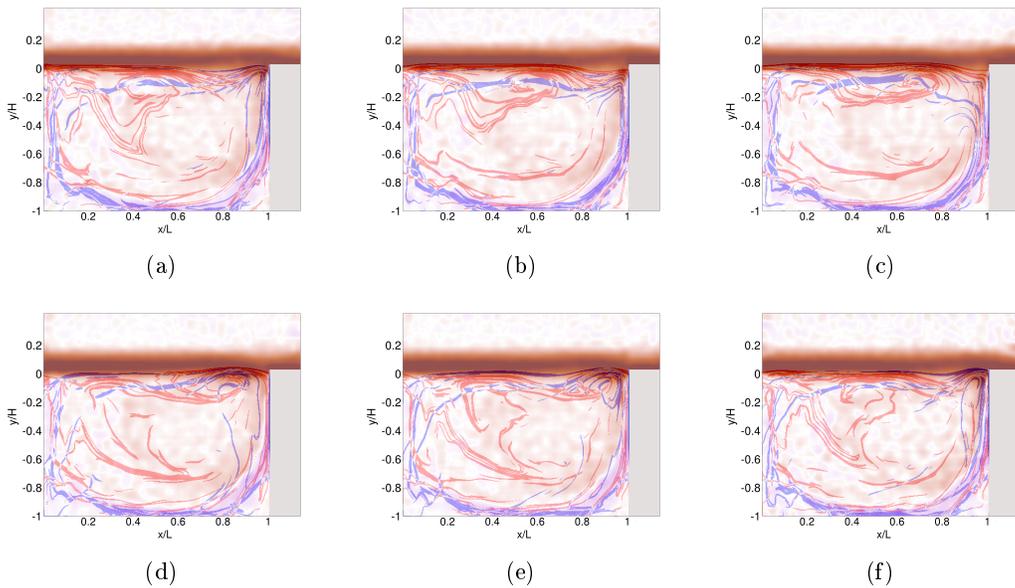


Figure 3.45 – (a)-(f) Crêtes du champ de FTLE (temps positif en rouge, temps négatif en bleu) pour un cycle complet d’impact de tourbillon de couche cisailée, entre $t = 3.000s$ et $t = 3.044s$. Le champ coloré en fond représente la champ de vorticité.

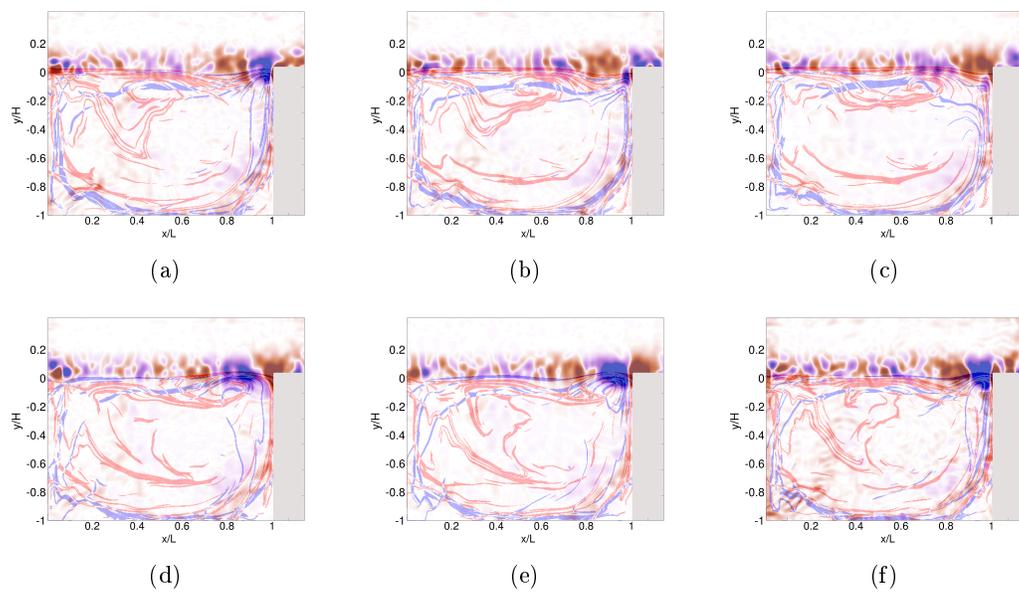


Figure 3.46 – (a)-(f) Crêtes du champ de FTLE (temps positif en rouge, temps négatif en bleu) pour un cycle complet d’impact de tourbillon de couche cisillée, entre $t = 3.000$ s et $t = 3.044$ s. Le champ coloré en fond représente le critère Q .

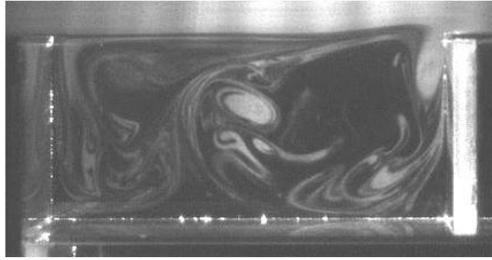


Figure 3.47 – Visualisation des structures par injection de fumée dans l'écoulement amont.

Les mêmes remarques peuvent être faites, concernant la comparaison entre critère Q (figure 3.46) et le champ de exposants de Lyapunov à temps fini. On remarque néanmoins que la couche cisailée n'est pas structurée selon ce critère. Il est alors clair que le gonflement des structures cohérentes lagrangiennes suit bien le tourbillon impactant.

Proche du bord amont, on distingue un entrelacs de lignes bleues et rouges, qui évoque une structure en "fer-à-cheval" (ce phénomène est visible, par exemple, figure 3.44(a)). Cet entrelacs est advecté de la figure 3.44(d) (position $(x/L, y/H) \approx (0.2, 0.6)$), vers la couche cisailée, comme le montre la figure 3.44(f). Par analogie avec les variétés stables et instables de systèmes dynamiques périodiques, ces structures sont probablement responsables du mélange dans l'écoulement intracavitaire.

Si l'on regarde l'action du flot dynamique $\Phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})$ la composante y du vecteur position, figure 3.48(a), une séparation nette est visible entre écoulements externe et intracavitaire. Les régions bleues sur la figure 3.48(a) finiront au fond de la cavité au temps final. Il apparait ainsi que des parcelles de l'écoulement externe se retrouveront dans l'écoulement intracavitaire. Cette zone est advectée par l'écoulement externe, comme on peut le voir figure 3.48(b). Pour être sûr que cette zone correspondant bien à du fluide provenant de l'écoulement extérieur, et n'est pas du fluide intracavitaire "aspiré" par les modulations de la couche cisailée, les trajectoires passées (en noire) et future (en rouge) d'une particule de cette zone sont représentées. La particule, initialement à l'extérieur de la cavité, finit bien dans la cavité.

L'échange de matière entre l'écoulement intracavitaire et l'écoulement extérieur ne se fait donc qu'à l'interface entre la cavité et l'écoulement affleurant. C'est visible sur les figures 3.44(c) et 3.44(f), où les LCS ne perdent en intensité que près du coin amont. C'est près de ce coin amont que se prépare l'injection de fluide provenant de l'écoulement externe, tout comme l'éjection de matière provenant de la cavité. C'est par contre lors de l'impact des tourbillons de la couche cisailée que l'injection se produit effectivement, comme on peut le voir sur les trajectoires des figures 3.48.

Il reste néanmoins indispensable de coupler cette analyse qualitative des structures aux trajectoires de particules.

On peut noter que les particules convergent vers une LCS répulsive, au niveau de la couche cisailée. C'est évidemment une zone d'étirement. Les crêtes du champ de FTLE dans cette région ne sont pas des frontières matérielles, mais des structures résultants de l'étirement. La LCS répulsive se superpose par ailleurs avec une LCS attractive. De nombreuses zones (les bords de la cavité) voient également cet alignement des structures

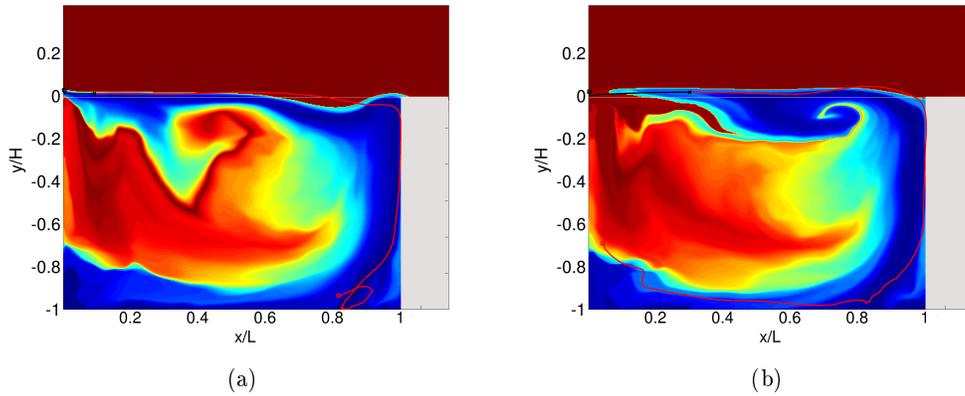


Figure 3.48 – Représentations de l’application du flot dynamique $\Phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})$ restreinte sur la composante y , pour un temps horizon $T = 0.08s$. La couleur représente la position finale selon y de la particule, après un temps T . Le rouge sombre, saturé, correspond à une position dans l’écoulement affleurant. Le dégradé correspond à la position dans la cavité, du rouge près de l’écoulement affleurant au bleu pour le fond de la cavité. La position initiale \mathbf{x} est repérée par la position dans l’image. Le trait blanc est un repère pour visualiser la limite entre l’écoulement interne et l’écoulement externe. La trajectoire d’une particule est également représenté. En noir son évolution vers le passé, en rouge son évolution future. (a) : temps initial $t_0 = 3.00s$. (b) : temps initial $t_0 = 3.02s$.

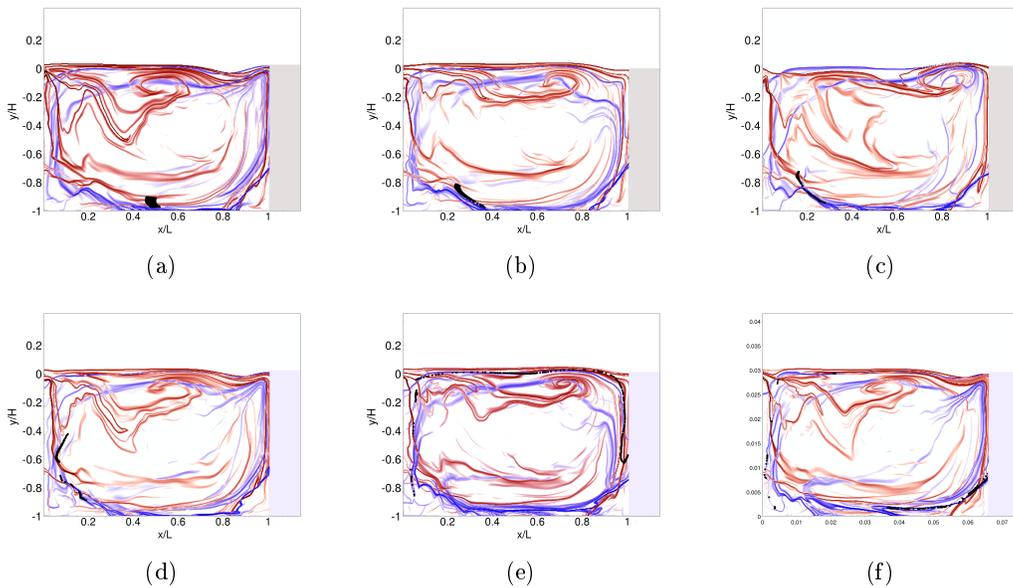


Figure 3.49 – Évolution de quelques particules (points noirs) au fond de la cavité, au cours du temps. Le fond coloré représente les crêtes du champ de FTLE (rouge pour le temps horizon positif, bleu pour le temps horizon négatif). (a) $t = 3.004s$. (b) $t = 3.016s$. (c) $t = 3.032s$. (d) $t = 3.052s$. (e) $t = 3.108s$. (f) $t = 3.144s$.

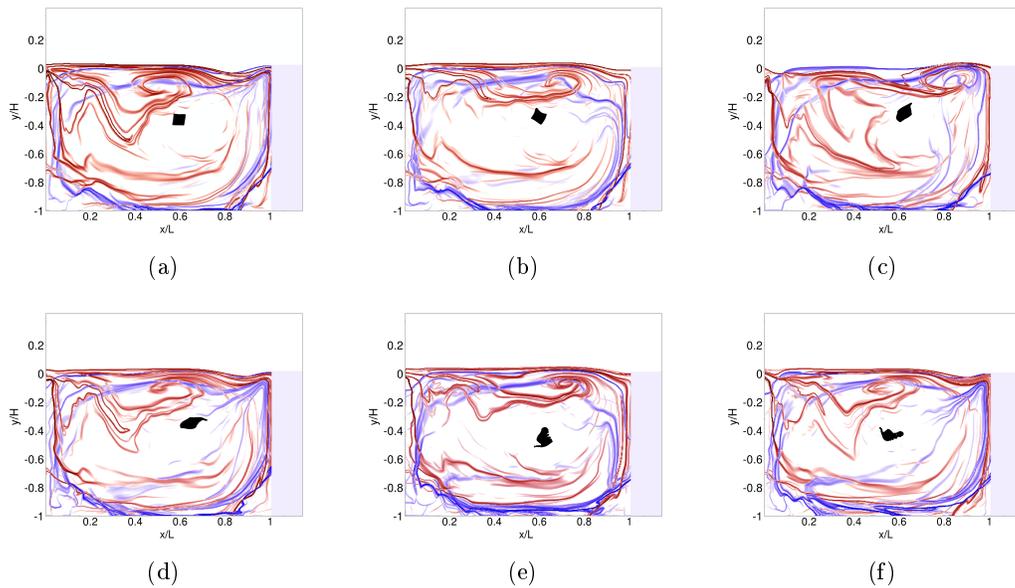


Figure 3.50 – Évolution de quelques particules (points noirs) au centre de la cavité, au cours du temps. Le fond coloré représente les crêtes du champ de FTLE (rouge pour le temps horizon positif, bleu pour le temps horizon négatif). (a) $t = 3.004$ s. (b) $t = 3.016$ s. (c) $t = 3.032$ s. (d) $t = 3.052$ s. (e) $t = 3.108$ s. (f) $t = 3.144$ s.

cohérentes lagrangiennes stables et instables. Il est facile de comprendre cette superposition. La LCS attractive est calculée en regardant l'évolution de particules vers le *passé*. Les particules, entraînées par la recirculation interne, approchent de la couche cisillée, tout comme les particules provenant de l'écoulement externe. L'algorithme identifie donc une structure convergente. Si on regarde maintenant le temps *futur*, les particules vont se séparer, entre celles restant dans la couche cisillée et celles plongeant dans la cavité. L'algorithme identifie donc également une structure instable. Néanmoins, c'est dans le fond de la cavité, zone à forte concentration de LCS, avec de nombreux croisements, que le mélange se fait le plus efficacement. L'ensemble initial de particules se scinde très vite en différents sous ensembles – séparés par la présence des structures lagrangiennes répulsives (*cf.* figure 3.49(d) où l'on voit bien l'influence des LCS instables) – ce qui est une indication du mélange.

Un ensemble de particules est suivi au centre de la cavité, illustré figures 3.50. Cet ensemble reste cohérent au fil du temps, les particules ne se séparent pas. Il est intéressant de remarquer qu'il n'y a quasiment pas de crêtes du champ d'exposants de Lyapunov à temps fini au centre de la cavité. Clairement, peu de brassage est effectué dans cette zone.

Il est possible d'observer, au fil du temps, une variation des zones délimitées par les LCS. Par exemple, la frontière de la recirculation centrale, figure 3.44(c), est en $x/L \approx 0.2$, alors que sur la figure 3.44(f), elle est en $x/L \approx 0.1$. Les structures cohérentes lagrangiennes étant des frontières matérielles, ces battements semblent violer le principe d'incompressibilité de l'écoulement. Ils sont en réalité des signes de la présence d'un écoulement transverse au plan de mesure. Cela est encore visible en comparant la fig-

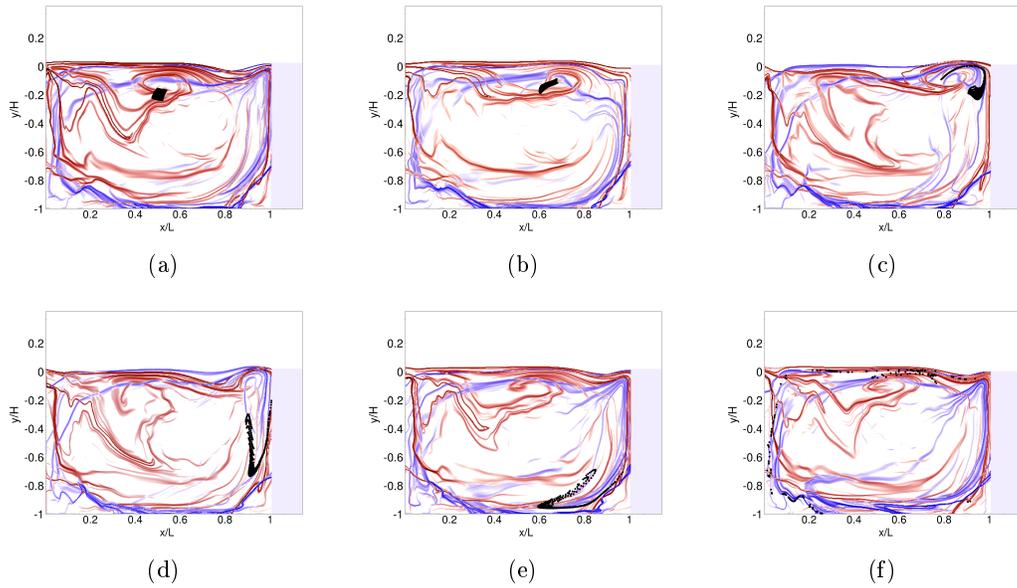


Figure 3.51 – Évolution de quelques particules (points noirs) dans le tourbillon délimité par les crêtes du champ de FTLE, au cours du temps. Le fond coloré représente les crêtes du champ de FTLE (rouge pour le temps horizon positif, bleu pour le temps horizon négatif). (a) $t = 3.004\text{s}$. (b) $t = 3.016\text{s}$. (c) $t = 3.032\text{s}$. (d) $t = 3.040\text{s}$. (e) $t = 3.052\text{s}$. (f) $t = 3.144\text{s}$.

ure 3.51(a) et la figure 3.51(c). Entre ces deux figures, la surface définie par les particules augmente de plus de 200%. Dans d’autres cas similaires, la surface peut se contracter (par exemple, une contraction d’environ 25% est observée entre les figures 3.49(c) et 3.49(d)).

Lorsqu’on regarde l’évolution de particules placées dans le tourbillon (figures 3.51), on remarque que la cohérence de l’ensemble reste assez bonne entre les figures 3.51(a) et 3.51(c), même si il y a un fort étirement. C’est une fois que les particules plongent au fond de la cavité que le mélange, une fois encore, se fait et que l’ensemble est séparé en nombreux sous ensemble distincts. C’est une illustration de l’importance de l’horizon choisi. Pour un horizon plus court, de l’ordre de $T = 0.05\text{s}$, les structures tourbillonnaires ne seraient pas encore visibles dans le champ d’exposants de Lyapunov à temps fini.

3.7.2 Extraction des propriétés lagrangiennes principales par réduction de modèle

Les temps d’horizon avant le feuilletage des structures est relativement faible, de l’ordre de la période dominante de couche cisailée. Les modes principalement responsables de la création des structures lagrangiennes cohérentes sont donc *a priori* les modes de couche cisailée. On se propose donc de faire un modèle fortement réduit de l’écoulement, basé exclusivement sur le mode dynamique associé Φ_ω à la fréquence d’oscillation de la couche cisailée :

$$\mathbf{u}_{ROM}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathcal{R}e(e^{i\omega t} \Phi_\omega(\mathbf{x})), \quad (3.6)$$

où $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ est le champ moyen de l'écoulement.

L'intérêt de travailler sur ce champ synthétique \mathbf{u}_{ROM} est double. Le premier est de filtrer l'écoulement, pour ne garder que la composante dominante. Le second est d'avoir un champ périodique. Alors, en appliquant l'algorithme de calcul du champ de FTLE, les LCS identifiées par les crêtes du champ d'exposants de Lyapunov à temps fini correspondent à des variétés invariantes de l'écoulement synthétique.

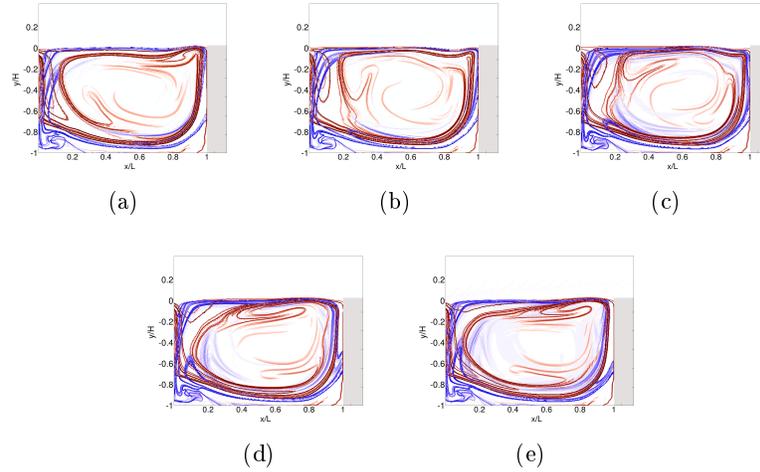


Figure 3.52 – Champs de FTLE (rouge : horizon positif, bleu : horizon négatif) pour une période du mode de couche cisailée sur l'écoulement réduit périodique.

L'écoulement synthétique est périodique. Les champs d'exposants de Lyapunov à temps fini pour un cycle peuvent être trouvés figure 3.52. Le modèle réduit capte les propriétés dominantes de l'écoulement (*cf.* figures 3.53 pour une comparaison entre un champ issu de l'écoulement et un champ issu de l'écoulement réduit). La recirculation interne est bien une zone non mélangeante, comme illustrée sur la figure 3.50. Elle apparaît légèrement plus allongée dans l'écoulement synthétique, mais la délimitation de cette zone est similaire dans le cas de l'écoulement réduit et de l'écoulement réel. La recirculation du coin amont est un lieu de croisements des structures lagrangiennes. La similarité entre le tourbillon impactant, pour les deux écoulements, est également frappante. La construction du modèle réduit a permis de filtrer les structures.

Ainsi, les régions proches du bord aval sont le lieu d'entrelacs de structures cohérentes lagrangiennes attractives et repulsives, pendant l'intégralité d'une période (*cf.* la figure 3.52). On peut suspecter que cette zone soit une zone de mélange, si elle s'avérait avoir une structure de type fer-à-cheval de Smale, comme le suggèrent les multiples croisements observés.

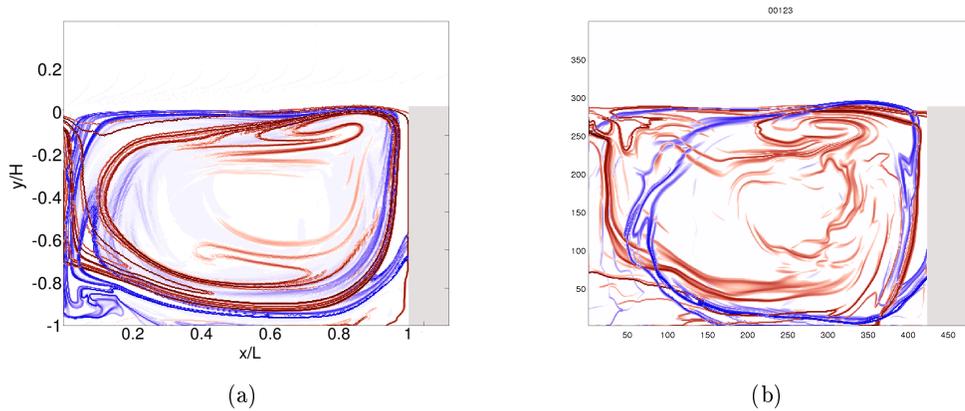


Figure 3.53 – Champs de FTLE (rouge : horizon positif, bleu : horizon négatif). (a) : Modèle réduit d’écoulement de cavité, pour un horizon correspondant à une période du mode de couche cisailée à $St = 1.02$, soit $T = 0.05$ s. (b) : écoulement de cavité, pour un horizon correspondant à $T = 0.08$ s.

3.7.3 Structures lagrangiennes de données issues de simulation numérique 3D

Nous nous intéressons maintenant aux structures lagrangiennes 3D extraites de l’écoulement de cavité simulé numériquement (*cf.* section 3.2.2). La délimitation entre les écoulement externe et intra-cavitaire est nettement soulignée par le champ d’exposants de Lyapunov à temps fini, dont des isosurfaces sont présentées figures 3.54, 3.55 et 3.56². Pour un horizon négatif comme pour un horizon positif, la nappe d’isosurface du champ de FTLE sépare les deux écoulements. Cette délimitation était déjà présente dans le cas 2D. Elle est attendue, puisque les échanges entre les deux écoulements sont réduits. Deux particules situées de part et d’autre de l’interface vont s’éloigner pour un horizon négatif, l’une restant dans l’écoulement interne, l’autre vers l’entrée de l’écoulement affleurant. Une structure attractive est donc détectée. Pareillement, pour un temps horizon positif, la particule à l’extérieur va sortir du champ d’observation, tandis que la particule intra-cavitaire, plus lente, va rester dans la cavité. Les particules s’éloignent, une structure répulsive est donc détectée. On comprend ainsi que les structures attractives et répulsives se tangentent dans cette région.

Les structures tourbillonnaires de la couche cisailée sont mal captées, contrairement aux structures identifiées dans la section précédente 3.7.1, par exemple sur la figure 3.44. On ne voit principalement que la séparatrice, qui oscille faiblement. Les données ne sont pas suffisamment résolues en temps dans cette zone, où les particules fluides sortent du champ de données en deux pas de temps. Néanmoins, juste sous le plan affleurant, dans la couche cisailée, on peut noter l’enroulement des structures lagrangiennes (*cf.* figure 3.57). Cet enroulement correspond au fluide entraîné par les tourbillons de la couche cisailée, et est en correspondance avec les enroulements de structures lagrangiennes 2D de la section précédente. Pour l’horizon choisi pour le calcul des FTLE, le feuilletage commence à

². Par soucis de visibilité, un facteur 0.5 est appliqué à l’axe x et seul un tiers de l’envergure – $z/H \in [2, 4]$ – est représenté dans les visualisations 3D.

apparaître dans cette zone où les structures lagrangiennes sont fortement repliées et se coupent. Du mélange y est potentiellement à l'oeuvre.

Pour comparaison, le critère \mathcal{Q} est appliqué au champ de vitesse. Le critère \mathcal{Q} , connu en 2-D sous le nom de critère d'Okubo-Weiss, est un champ scalaire eulérien, proposé par Hunt *et al.* [157]. Il permet de localiser les zones où la rotation prend le pas sur le cisaillement dans un écoulement incompressible. Ce critère est en outre invariant par transformation galiléenne. Il est construit sur la comparaison des parties symétriques S et anti-symétrique Ω du gradient du champ de vitesse $\nabla \mathbf{u}$:

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2} (\Omega^2 - S^2) \quad (3.7)$$

On peut noter la bonne correspondance globale entre le critère \mathcal{Q} et les champs de FTLE, déjà noté par Green *et. all* [62]. Le coin amont, pauvre en structure, et la zone de recirculation du fond amont de la cavité possèdent la même topologie (*cf.* figures 3.55). Les injections près du bord aval, visibles par l'alternance de structures dans les champs de critère \mathcal{Q} , correspondent à des modulations des isosurfaces du champ de FTLE. La recirculation est plus précisément captée par les structures lagrangiennes extraites du champ de FTLE. La recirculation est nettement délimitée par des nappes, structurées dans la direction transverse, là où le critère \mathcal{Q} montre des alternances des structures parfois difficiles à déchiffrer (par exemple figure 3.54(b)). Les zones ayant de faibles valeurs du champ d'exposants de Lyapunov à temps fini correspondent à également à des régions où le critère \mathcal{Q} est faible. D'autres structures, comme des filaments tourbillonnaires ou des recirculations secondaires, sont captés par à la fois par le champ de FTLE et le critère d'Okubo-Weiss, comme l'illustre la figure 3.58.

Le champ de FTLE ne possède pas de structures lagrangiennes répulsives au centre de la zone de recirculation, tandis qu'il y a présence de LCS attractives. Comme dans le cas 2D, le centre de la cavité n'est pas une zone mélangeante. On peut noter par ailleurs que le centre de la cavité est une zone où la valeur du critère \mathcal{Q} reste faible. Les LCS stables au centre de la zone de recirculation sont en revanche très dépendantes du temps (*cf.* la colonne de gauche figure 3.54). Elles tournent sur elles mêmes, comme cela est mis en valeur sur la figure 3.59.

Or, l'écoulement de cavité présente également un écoulement transverse moyen. On peut voir cet écoulement moyen sur la figure 3.60. La vitesse moyenne est de l'ordre de $\bar{\mathbf{u}}_z \approx 0.007$ m/s, alors que les fluctuations transverses moyennes sont trois fois plus grandes, de l'ordre de $\mathbf{u}'_z \approx 0.02$ m/s. Ces mouvements de rotation des LCS attractives, associés à la dérive, provoquent un mouvement globalement hélicoïdal. Comme les LCS sont modulées dans la direction transverse, ce mécanisme permet d'expliquer les variations de taille, au cours du temps, des structures lagrangiennes dans le cas 2D.

Bilan de l'analyse lagrangienne sur l'écoulement de cavité

Les zones susceptibles d'être les contributrices majeures au mélange se produisant dans la cavité ont été identifiées. Dans le cas d'un écoulement bi-dimensionnel, les propriétés de mélange sont celles associées aux modes principaux de l'écoulement. La DMD peut être utilisée pour identifier les structures principales du mélange, où, plus directement, pour construire un écoulement périodique afin de pouvoir appliquer les outils

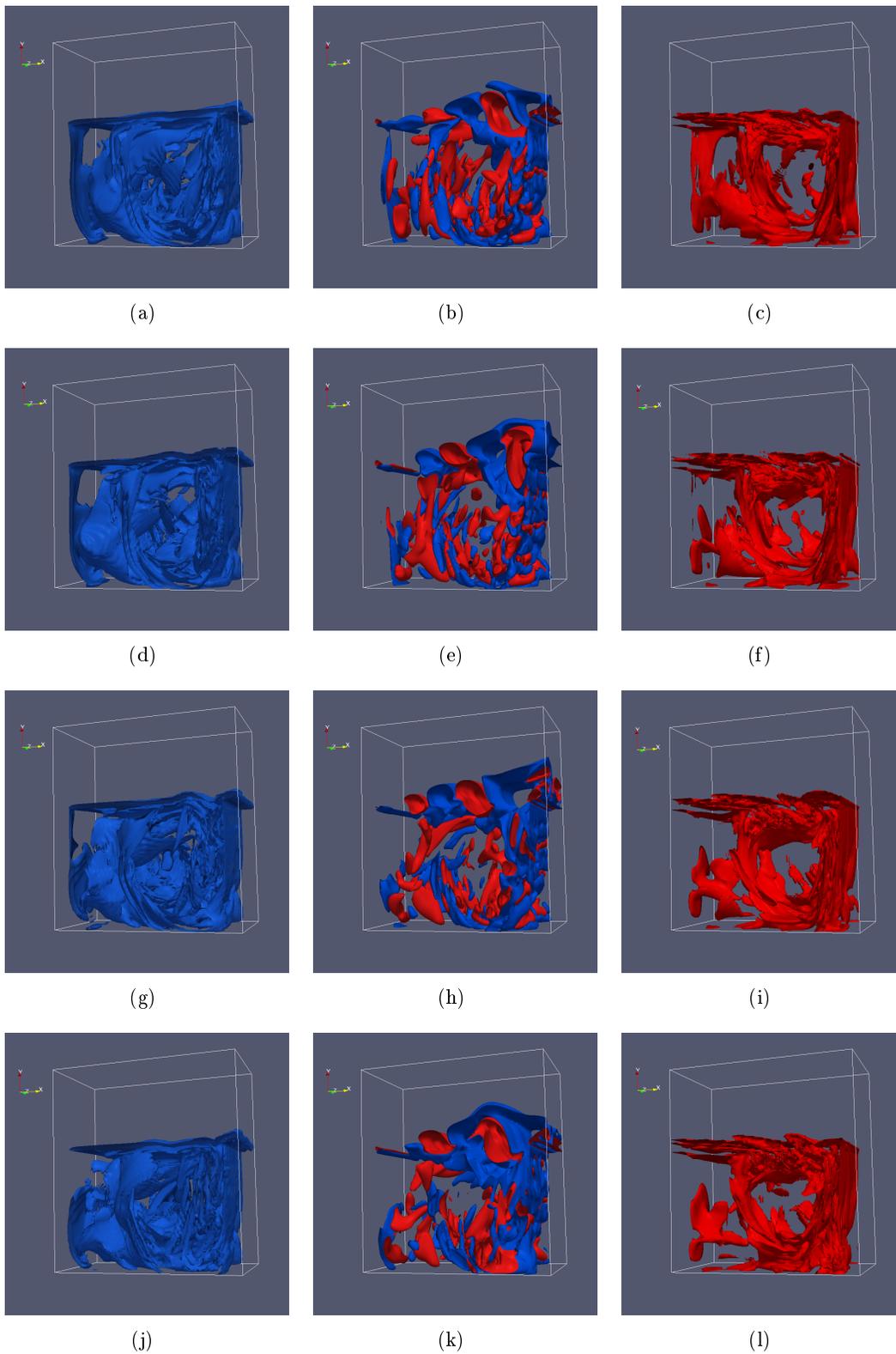


Figure 3.54 – Semi retournement des structures intra-cavitaires. Colonne de gauche : isosurface du champ de FTLE pour un horizon négatif de 0.23s. Colonne de droite : isosurface du champ de FTLE pour un horizon positif de 0.23s. Au centre : isosurfaces positive (rouge) et négative (bleue) du critère \mathcal{Q} . Vue de face.

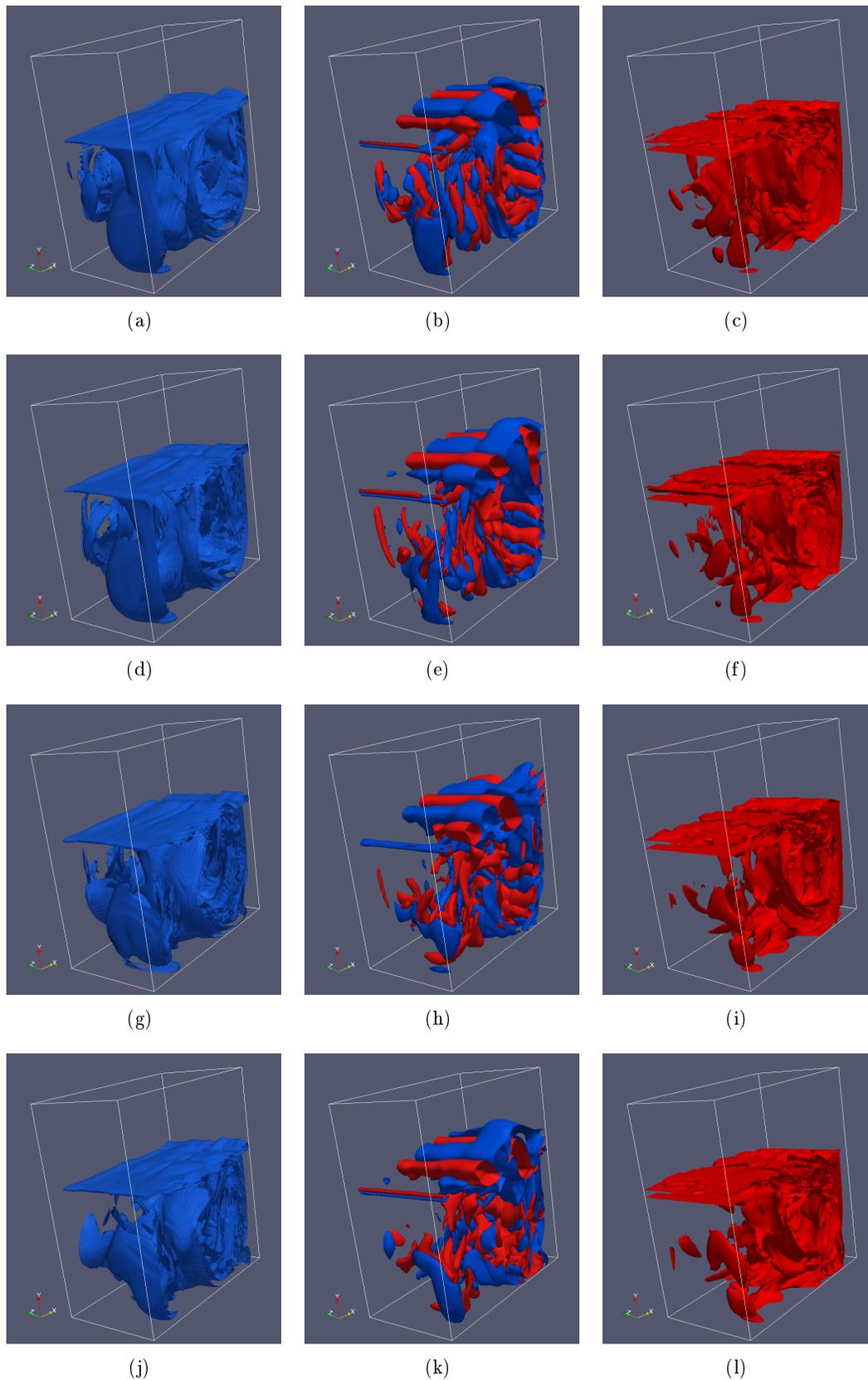


Figure 3.55 – Semi retournement des structures intra-cavitaires. Colonne de gauche : isosurface du champ de FTLE pour un horizon négatif de 0.23s. Colonne de droite : isosurface du champ de FTLE pour un horizon positif de 0.23s. Au centre : isosurfaces positive (rouge) et négative (bleue) du critère \mathcal{Q} . Vue arrière.

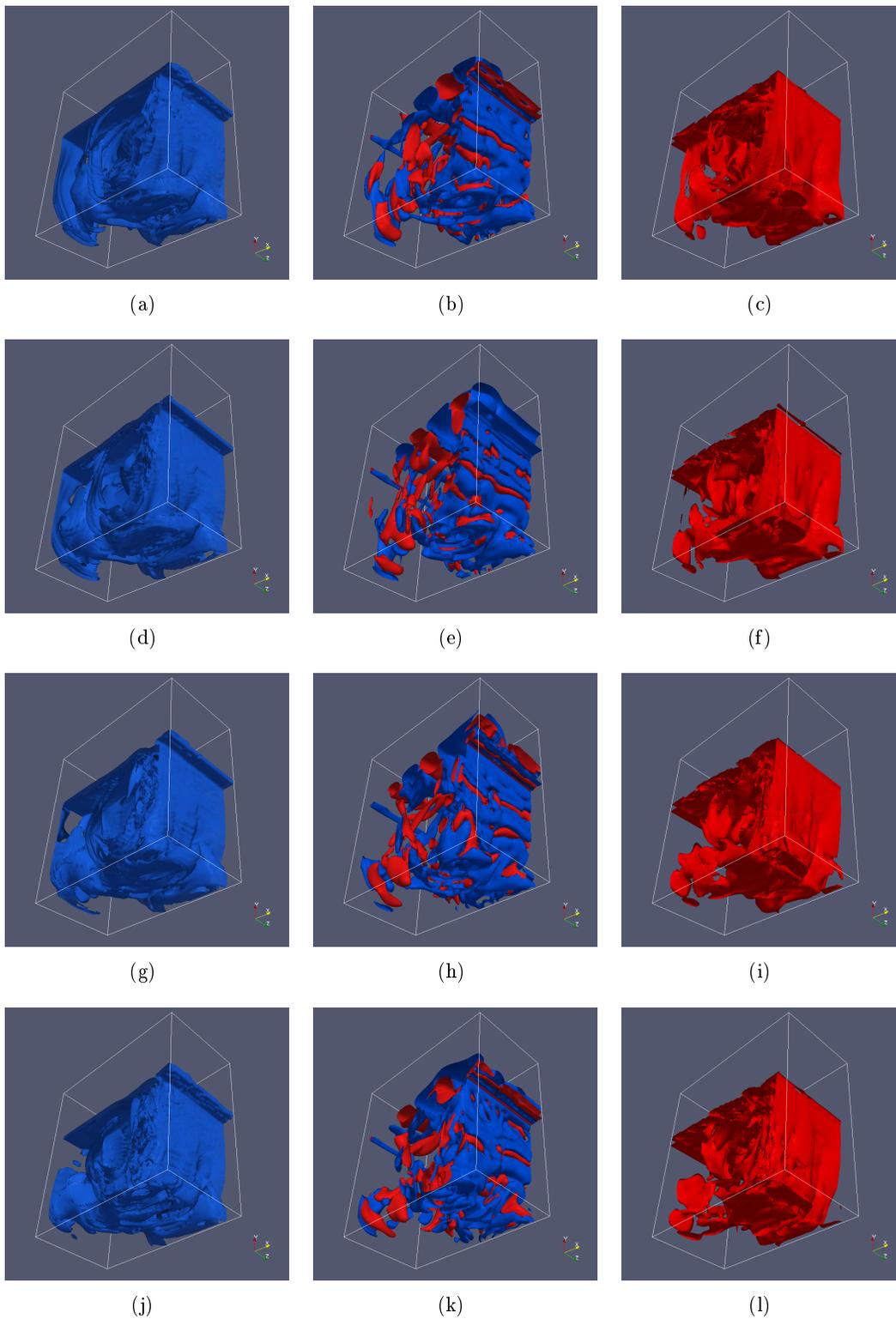


Figure 3.56 – Semi retournement des structures intra-cavitaires. Colonne de gauche : isosurface du champ de FTLE pour un horizon négatif de 0.23s. Colonne de droite : isosurface du champ de FTLE pour un horizon positif de 0.23s. Au centre : isosurfaces positive (rouge) et négative (bleue) du critère Q . Vue du dessous.

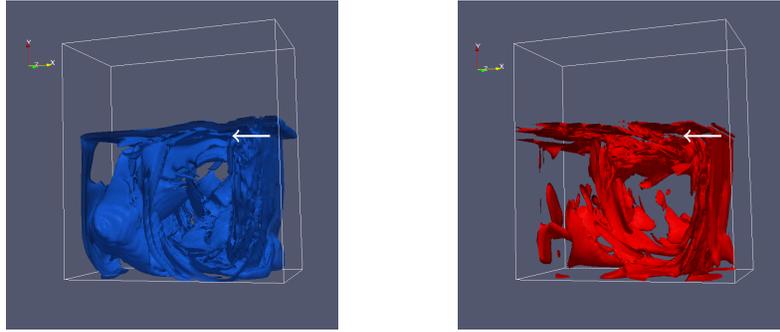


Figure 3.57 – Enroulements et feuilletages des structures lagrangiennes stables (gauche) et instables (droite) lors d'un impact tourbillonnaire.

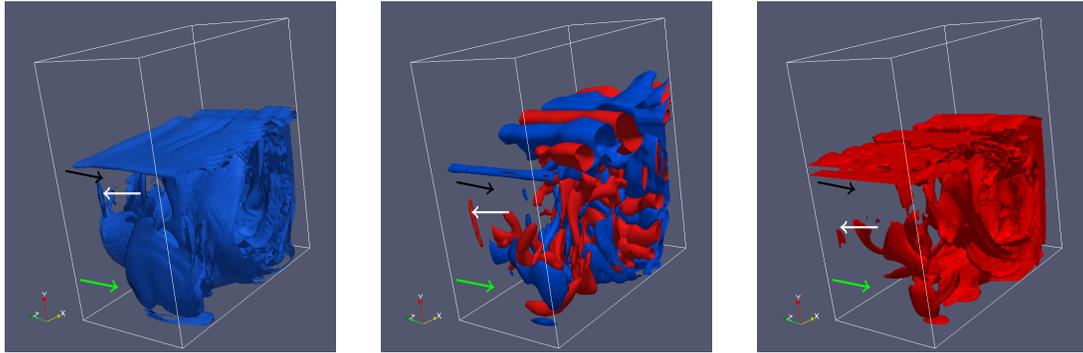


Figure 3.58 – Correspondances entre le critère Q (centre), et les champs de FTLE (horizon négatif à gauche et horizon positif à droite). Les flèches blanches pointent sur des filaments tourbillonnaires, les flèches noires sur des zones calmes du coin amont, les flèches vertes sur la recirculation au fond en amont de la cavité.

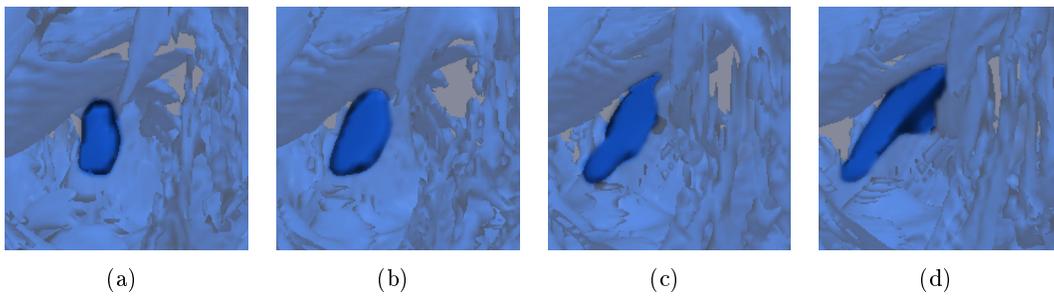


Figure 3.59 – Isosurface du champ de FTLE, au centre de la cavité, pour quatre instants consécutifs. Une structure centrale est mise en valeur.

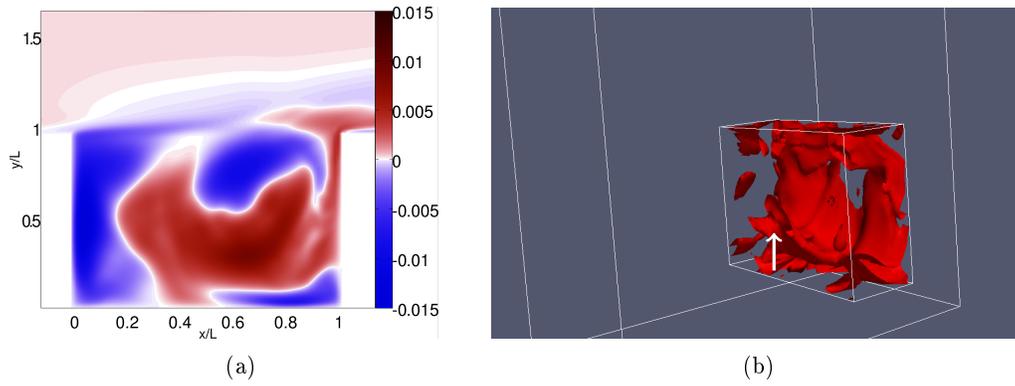


Figure 3.60 – (a) Écoulement transverse moyen. (b) Extrait de l'écoulement, mettant en valeur la modulation transverse du champ de FTLE.

provenant de la théorie des systèmes dynamiques. Les zones principales de mélange ne semblent néanmoins pas correspondre, entre une analyse 2D et 3D. Les zones d'entrelacs des variétés attractives et répulsives sont principalement près du bord amont dans le cas des données 2D issues de mesures expérimentales, tandis qu'elles semblent être proches du bord aval dans le cas de données 3D issues de simulation numérique. La caractérisation du mélange, dans des écoulements tri-dimensionnels, sur des données issues de mesures planaires est donc posée.

Deuxième partie

Visualisation, Interaction et
Caractérisation de Données
Complexes.

Chapitre 4

Visualisation interactive de données complexes

La vision, à elle seule, est un canal transportant autant d'informations que tous les autres canaux sensoriels réunis. Ainsi, la visualisation de données 3D, et plus particulièrement la visualisation scientifique, se révèle d'une importance toute particulière pour la compréhension et l'analyse de données complexes. Un simple regard sur des données permet de prendre en compte quelques millions de points de mesures simultanément, d'établir des connections entre des propriétés distantes ou encore une perception multi-échelle. La perception d'une structure cohérente dans un ensemble, en relier un ensemble d'extremum dans un champ scalaire (comme sur la figure 3.44), est un exemple de tâche qu'un humain effectue immédiatement, tandis qu'identifier ces structures numériquement est une gageure.

La visualisation efficace ne se limite pourtant pas à la simple "vue" de données [176], mais demande en plus des stratégies d'interaction et d'exploration *ad hoc* des données, en particulier en sollicitant les autres canaux sensoriels, en particulier haptique et audio. Cette définition élargie de la visualisation fait émerger de nombreuses problématiques spécifiques [84]. Une des contraintes principales est l'utilisation d'interfaces à deux degrés de liberté (souris, écran tactile), alors que la manipulation et l'exploration en nécessiteraient plus. L'exploration, par exemple, demande au minimum trois degrés de rotations pour s'orienter dans l'espace. Trois autres degrés de liberté sont nécessaires pour se déplacer selon les trois directions d'espace. Si, pour la manipulation, l'expert veut ajouter une fonction de zoom, sept degrés de libertés sont déjà nécessaires. De plus, l'utilisation d'outils spécifiques à la visualisation et compréhension scientifique, tous illustrés dans la partie précédente, tel que les plans de coupe (voir la figure 3.39), l'ensemencement des données par des particules (*e.g.* la figure 3.50), la représentation superposée de différentes composantes de l'espace des paramètres du système tel que la température, le champ de divergence matériel, la vorticité ou les champs d'exposant de Lyapunov du champ de vitesse (de telles illustrations peuvent se trouver figure 3.34 ou figure 3.45), implique une profonde refonte de l'ergonomie et des différentes possibilités d'interaction que proposent les systèmes existants actuels, et de développer de nouvelles métaphores d'interactions. Il est en effet délicat de permettre toutes ces possibilités dès lors qu'elles partagent le même espace d'interaction. Suite à la présentation de l'état de l'art concernant l'exploration et

la visualisation, centré principalement sur un contexte de données scientifiques, la section 4.3 expose un premier projet, permettant la visualisation et l'exploration interactive de données scientifiques. Cette approche a permis de soulever un certain nombre de concepts plus abstraits sur la façon d'explorer des données scientifiques. De là, j'ai proposé des méthodes pour une interaction *directe* et des modalités d'exploration immersive, qui seront décrits dans la section 4.4.

4.1 État de l'art pour l'exploration et la visualisation de données complexes

La représentation de données complexes m'est apparue, dans le cadre de mes travaux, comme une question cruciale. En suivant le processus expert-centré de Carpendale [24], à mon sens, plusieurs critères sont indispensables pour qu'un système soit diffusé dans la communauté des mécaniciens des fluides. Une exploration des données, associée à la possibilité d'utiliser des outils plus complexes (*e.g.*, des plans de coupe, des isosurfaces *etc.*) se doit d'être la fonctionnalité principale. Mon sentiment est que d'autres points importants ont été négligés dans les solutions existantes. En particulier, une interface doit être facile à utiliser. D'expérience, les experts-utilisateurs ne doivent pas avoir de phase d'apprentissage longue, sans quoi le système sera délaissé. Un deuxième point est qu'une interface performante doit favoriser les échanges entre experts. Il en résulte qu'un système portable est un plus. Enfin, un système d'exploration de données scientifiques doit être accessible. La suite de cette partie est un état de l'art concernant les systèmes et techniques d'interactions correspondant à ces besoins. Les limitations inhérentes m'ont conduit à proposer des systèmes, présentés dans les sections 4.3 et 4.4.

4.1.1 Interaction tactile

Un certain nombre de systèmes utilise des interfaces tactiles pour la visualisation scientifique. Plus largement, depuis une demi douzaine d'années, l'essor des interfaces tactiles au travers des smartphones et tablettes portables a été suivi par la production de nombreux travaux dédiés à cette approche. Ces études ont montré les avantages inhérents aux interfaces tactiles (*e.g.* Kin *et al.* [97]), tels que la manipulation directe [143], ou les facilités de collaborations [81]. De nombreuses techniques d'interaction existent, usuellement conçues pour répondre à un but précis. Ainsi, Sultanum *et al.* [168, 167], ont présenté, par exemple, un ensemble de métaphores spécifiquement pour la manipulation de données 3D déformables, illustré figure 4.1. Hancock *et al.* [74] ont présenté une métaphore spécifiquement dédiée à la manipulation d'objets de taille moyenne, à trois doigts. Reisman *et al.* [141] proposent une méthode basée sur l'économie de mouvements de l'utilisateur, pour construire une métaphore de rotation-zoom-translation intuitive pour la manipulation d'objets plans dans un espace 3D.

De manière générale, l'utilisation de surface tactile permet d'augmenter le nombre de degrés de liberté, comparativement aux approches classiques sur ordinateurs, et permettent des manipulations certes restreintes sur un plan, mais *directes* [74, 129, 141].

La majorité des travaux spécifiquement orientés pour la visualisation scientifique, sur des systèmes tactiles, par exemple [48, 85], ne concerne que l'exploration de données 2D. Coffey *et al.* [28] proposent d'explorer des données en projetant une version miniature

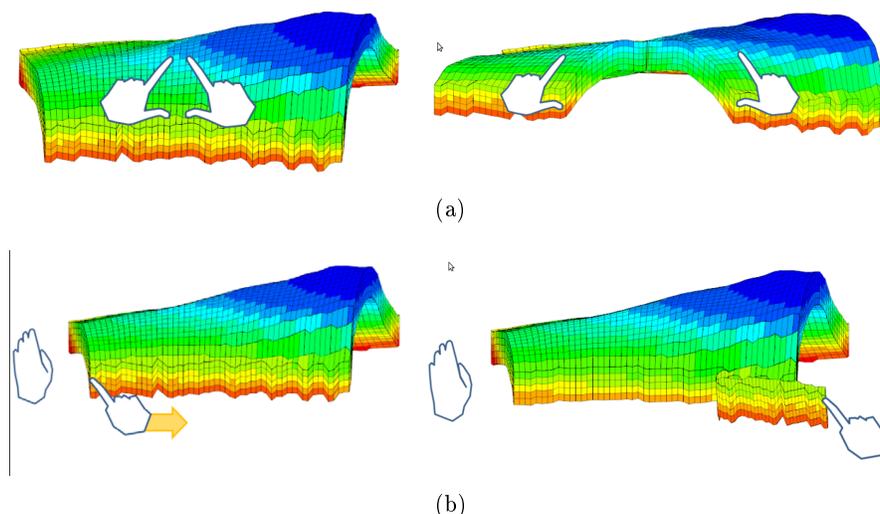


Figure 4.1 – (a) : Split it ! métaphore proposée pour séparer un jeu de données en deux parties. (b) : Peel it ! métaphore proposée pour éroder un jeu de donnée. D’après Sultanum *et al.* [167].

et stéréoscopique directement sur la surface d’interaction, par le biais d’un dispositif de suivi dans l’espace de l’utilisateur. D’autres travaux s’orientent plus spécifiquement vers un domaine pointu, et ne peuvent être que partiellement généralisés, comme Sultanum *et al.* [168, 167] ou la table médicale de Lundström *et al.* [115]. Butkiewicz & Ware [20] ont présenté une application en mécanique des fluides, concernant la description d’écoulement océanographique. L’intérêt de cette étude réside principalement dans l’inclinaison de la table stéréoscopique, faisant ainsi coïncider les données et l’espace de travail. Yu *et al.* [179] ont proposé un cadre global pour la simple exploration de données 3D, repris dans la section 4.3, qui permet des manipulations dans l’espace de travail. Une manipulation directe tend, naturellement, à se faire par l’utilisation de métaphores directes. Dans la section suivante, je présente l’utilisation directes d’objets tangibles pour l’exploration et la manipulation de données.

4.1.2 Réalité Mixte par Interaction 3D

La réalité augmentée et/ou virtuelle (*i.e.* réalité mixte), a intensément été utilisée pour l’exploration d’espace, y compris dans le cadre de données scientifiques. Les premiers systèmes de réalité augmentée se fondaient sur la détection de la position de la tête, et imposaient de lourds systèmes, inconfortable et fatiguant [79]. Les CAVE permettent une immersion totale dans un environnement. Au travers du suivi de tête et de mains, la navigation peut se faire naturellement, comme le montre Von Kapri *et al.* [93]. Ohno *et al.* [131] ont ainsi proposé la librairie VFIVE, permettant l’utilisation de VTK pour la visualisation scientifique, adaptée aux CAVEs, comme illustré figure 4.2.

L’OCULUS RIFT et les autres casques de type HMD (Head-Mounted Device) rendent possible une réalité virtuelle puissamment immersive. Il est connu (*e.g.* Kennedy *et al.* [94], Dong *et al.* [34]) que ces techniques induisent généralement de la cinétose

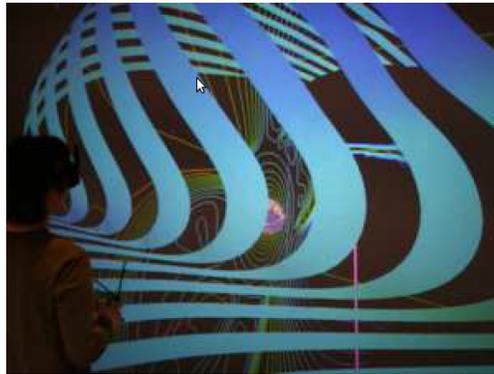


Figure 4.2 – Système VFIVE, permettant la visualisation dans une CAVE [131]. Des lignes de courant et des isosurfaces sont représentées.

(*i.e.* légers malaises et nausées) aux utilisateurs, qui peuvent perdurer et dégrader les performances des utilisateurs.

La légèreté du système de réalité mixte et de l’installation spécifiquement dédiée pour la détection est toujours un objectif [88]. Les capteurs **PRIMESENS** vont dans ce sens, et permettent des interactions basées sur la détection des mains [88, 77]. Des gestuelles peuvent alors remplacer avantageusement les approches modales (*i.e.* les arborescences de menus) [106]. La démocratisation de tablettes tactiles [135] et de smartphones [96] permet de supprimer ces inconvénients inhérents, mais le gain associé en mobilité se fait au détriment de la transparence d’interaction (c’est-à-dire le caractère intuitif de la manipulation par l’utilisateur) et de l’espace de travail. Les travaux de Coffey *et al.* [28] et de Butkiewicz & Ware [20] montrent l’intérêt de l’utilisation de techniques hybrides, mariant réalité virtuelle/augmentée, interfaces tactiles et colocalisation entre l’espace de travail et les données manipulées. Ware & Rose [177] ont, en particulier, montré l’importance de la colocalisation entre les données et la manipulation pour améliorer les performances des sujets.

La manipulation directe et colocalisée nous a incité naturellement à utiliser des objets tangibles pour l’exploration de données, dans un cadre de réalité augmentée et/ou virtuelle.

4.1.3 Réalité Mixte par Interaction Tangible

L’utilisation d’interface à base d’objets tangibles, *i.e.* des objets manipulables par l’utilisateur, est apparu dans les années quatre-vingt-dix (voir, pour plus d’informations, Shaer & Hornecker [163]), en réponse à l’apparition des interfaces graphiques, afin de remplacer les interactions dans le monde physique, plutôt que d’interagir sur l’écran [87].

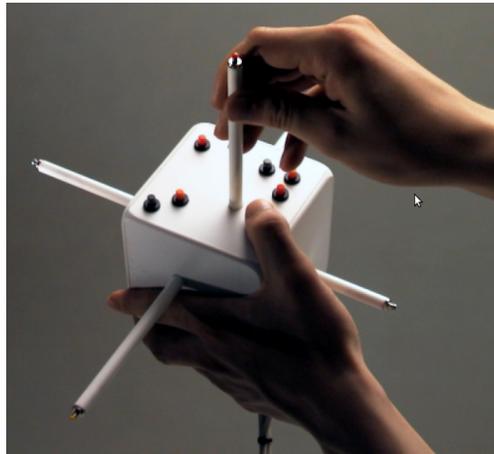


Figure 4.3 – La CubicMouse, proposée par Frohlich & Plate [50], permet des déplacements en 3D, en manipulant les trois tiges symbolisant les trois axes de l’espace.

L’utilisation de tangibles pour de l’exploration volumique [166] a suivi, en particulier pour l’exploration de données médicales, par Hinckley *et al.* [78], toujours basé sur la métaphore introduite par Fitzmaurice [46, 47]. Tout comme dans le prototype présenté par Qi & Martens [139], l’orientation et la manipulation des données et de plans de coupe se fait par la manipulation d’un objet tangible. En particulier, la CubicMouse (figure 4.3) proposée par Frohlich & Plate [50] est un outil performant pour la navigation et le positionnement d’objets (*e.g.* des plans de coupe) dans des espaces 3D. Un défaut important est néanmoins l’utilisation des deux mains pour tirer partie de cet instrument, ce qui limite *de facto* les autres autres métaphores utilisables et nécessaires pour une exploration de données scientifiques.

D’autres objets tangibles, tel que le HandSaw de Bonanni *et al.* [13], la CubicMouse de Frohlich & Plate [50] ou les tangibles de Qi *et al.* [139], sont dédiés à des fonctionnalités précises (manipulation de plans de coupe, etc). Néanmoins, pour ces techniques, la représentation des données se fait sur un écran, aucune superposition sur les objets tangibles n’est donc possible, alors que la colocalisation permet d’importantes améliorations des performances des utilisateurs [177].

Afin de permettre cette colocalisation entre les données et les interactions, Kruszyński & Van Liere [101] ont proposé d’imprimer en 3D les données. Manipulations et interactions (voir figure 4.4) sont donc *a fortiori* colocalisées. Cette technique n’est en pratique utilisable que si les données ne sont pas pleines. De plus, aucun retour visuel n’est proposé, si ce n’est sur un écran à part, brisant en partie la colocalisation du système.

Une seconde possibilité est de tenir un écran dans la main et le considérer comme une fenêtre vers un environnement virtuel. Cette métaphore a déjà été introduite par Fitzmaurice [46]. L’impératif de positionnement de la fenêtre dans la scène implique de connaître à tout moment la position précise de la tablette. La méthode la plus utilisée est le montage de la tablette sur un bras mécanique [175, 12] (voir l’image 4.5(a)) mais cela limite considérablement la mobilité et la portabilité du système. La transparence est également affectée. Scarpa *et al.* [117] ont proposé de localiser la tablette (*cf.* image 4.5(b)) par des capteurs externes, dans une pièce équipée, dans une application

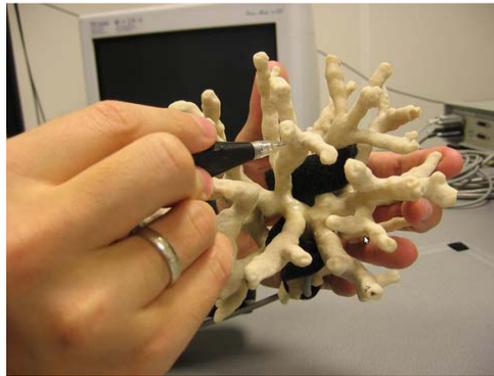
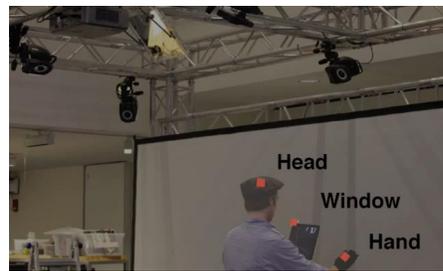


Figure 4.4 – Interaction directe avec des données imprimées en 3D, d’après Kruszyński & Van Liere [101].

permettant de voir le squelette d’un chat. En pratique, ce système n’est pas très différent d’une CAVE. Néanmoins, la tablette est alors totalement mobile dans l’espace de l’utilisateur. Une troisième méthode [64] reste d’utiliser les capteurs à disposition dans



(a)



(b)

Figure 4.5 – (a) : positionnement de la tablette par un bras mécanique. D’après Tsang *et al.* [175] (b) : positionnement de la tablette par des capteurs externes. D’après Scarpa *et al.* [117].

les tablettes et smartphones, et est présenté section 4.4.

4.2 Navigation et visualisation des données

Pour la suite des travaux présentés, l’environnement de visualisation choisi est **PARAVIEW**. Ce logiciel est largement utilisé par la communauté scientifique des mécaniciens des fluides pour la visualisation de données 3D (voir, par exemple, les illustrations des sections 3.6.4 et 3.7.3). Néanmoins, l’interface de **PARAVIEW** est entièrement modale. Réaliser une action passe par la navigation dans une arborescence de menus. Ce type d’interface est réhhibitoire dans le cadre d’interfaces tactiles [154], et est donc rejetée. La visualisation repose cependant sur la librairie **VTK**, utilisée en pratique par **PARAVIEW**, en particulier pour les calculs et l’affichage des données, tel que des isosurfaces, des trajectoires de particules ou la vorticité (voir, *e.g.*, les figures de la section 3.6.4). Les visualisations

de type **PARAVIEW** (*e.g.* les méthodes de visualisations volumiques), sont ainsi fidèlement reproduites. D'autres fonctionnalités de haut niveau, en particulier les tirages de rayons réalisés sur la carte graphique, ou la construction d'isosurfaces d'un champ scalaire, sont nativement disponibles.

La question des tables de couleur utilisées pour la représentation de données n'est pas anodine. Les tables de couleurs en arc-en-ciel sont connues pour ne pas rendre fidèlement toutes les caractéristiques des données [147, 112, 14]. Néanmoins, ce type de tables (*i.e.* la "colormap jet") étant les plus usitées dans le cadre de la mécanique des fluides, nous les avons conservé dans le cadre des travaux suivants afin de ne pas introduire un biais auprès des utilisateurs.

4.3 Une Interface Tactile pour l'exploration et la visualisation de données scientifiques

L'analyse des besoins de mécaniciens des fluides, basé sur mon expérience pour la visualisation de données 3D (voir, *e.g.*, les sections 3.7.3 ou 3.6.4) et par un processus de développement centré sur l'utilisateur [159, 118], a permis d'isoler un certain nombre de fonctionnalités de base, nécessaires pour l'exploration de données issues de la mécanique des fluides.

L'exploration temporelle des champs de données (fonctionnalité **F1**¹), afin par exemple de suivre un tourbillon, est indispensable dans le cadre de la mécanique des fluides. Le couplage entre un champ scalaire (le critère \mathcal{Q} , le champ de exposants de Lyapunov à temps fini) et le champ de vitesse est fondamentale (**F2**) pour une bonne compréhension des données. Il faut donc pouvoir coupler un champ de vecteur (données 3D3C - trois directions, trois composantes) et un champ scalaire (données 3D1C - trois directions, une composante). Le champ scalaire peut être délicat à appréhender. Il faut pouvoir le représenter sous forme d'isosurfaces (**F3**), afin de visualiser les structures principales et l'organisation 3D du champ 3D1C. La navigation et le zoom sont des fonctionnalités (**F4**) de base pour l'exploration scientifique. La manipulation (**F5**) de plan de coupe est indispensable pour la bonne compréhension des champs 3D (voir l'utilisation de plan de coupe section 3.7.3). Pouvoir interagir avec le plan de coupe (**F6**), tel que positionner des particules (**F7**) en un point précis, avoir accès à une valeur, ou positionner un axe est également une fonctionnalité appréciable. L'ensemencement par particules est important, pour visualiser le champ de vecteur 3D3C, l'influence de tourbillons, illustrer le champ 3D1C (particulièrement pour un champ d'exposants de Lyapunov à temps fini présenté chapitre 2) ou encore identifier les zones mélangeantes.

Une contrainte que nous nous imposons est la réalisation d'une interface abordable² (**F8**) et épurée (**F9**) afin de maximiser l'espace d'interaction. Enfin, la possibilité d'utiliser un écran de grande dimensions, présenté par la suite, permet d'envisager une collaboration co-localisée (**F10**), permettant à plusieurs experts d'interagir ensemble.

Ces fonctionnalités ont servi de guide pendant l'élaboration d'une interface tactile et de métaphores dédiées à l'exploration de données scientifiques.

1. La liste des fonctionnalités définie dans ce paragraphe sera utilisée par la suite
 2. c'est-à-dire que son utilisation est suggérée par son design [57]

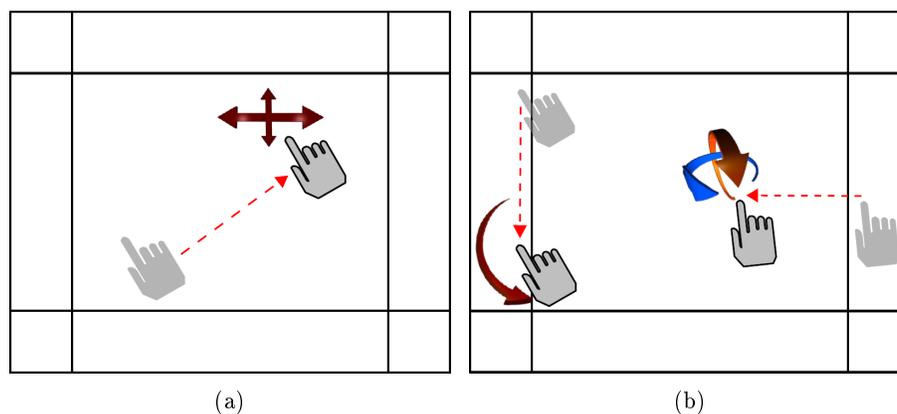


Figure 4.6 – Exemple de l'utilisation du cadre **Fi3D** par manipulation bi-manuelle. (a) : Translation. (b) : Rotation. D'après Yu *et al.* [179].

4.3.1 Présentation de l'interface

Présentation du système de navigation **Fi3D**

L'exploration interactive de jeux de données 3D nécessite au moins six degrés de liberté. Les trois premiers degrés de liberté correspondent à l'orientation des données. Trois rotations sont nécessaires. Ensuite, positionner les données demandent trois translations, *i.e.* trois degrés supplémentaires. Toute interaction additionnel (par exemple une fonction de zoom) entrainera la contrainte d'au moins un degré de liberté additionnel. La contrainte liée à la possibilité de zoomer, comme dans Yu *et al.* [179], et donc d'avoir les données qui remplissent l'espace d'interaction, motive le choix d'utiliser les widgets **Fi3D** pour les interactions de navigation (**F4**). De plus, les widgets **Fi3D** n'utilisent, simultanément, que deux doigts au maximum, ce qui laisse la possibilité d'implémenter d'autres interactions pour toutes les fonctionnalités citées précédemment. Le système **Fi3D** est un ensemble de métaphores, principalement bi-manuelles, permettant la navigation dans un espace 3D. Ce système est basé sur l'utilisation du cadre comme un widget, permettant d'augmenter le nombre de degrés de libertés de l'utilisateur en segmentant l'espace de travail. Ainsi, l'interaction peut être différente selon que la position initiale de la métaphore soit sur le cadre ou dans le cadre. Les translations, par exemple, sont contrôlées par un mouvement dans le cadre (*cf.* figure 4.6(a)). Au contraire, lorsque le mouvement inclue le cadre, l'utilisateur contrôle alors les rotations hors du plan.

Présentation de l'interface générale

Le dispositif a été inspiré par les travaux précédents de Isenberg *et al.* [85, 179, 86], et la table médicale (MVT) de Lundström *et al.* [115]. L'écran, inclinable, a une définition de 1920x1080px et possède une large diagonale de 55 pouces, afin de permettre des interactions co-localisées (**F10**). La hauteur est également personnalisable. L'utilisation est resté quasi-verticale (par préférence des utilisateurs). L'interaction multipoints est apportée par une surcouche matérielle, **PQLABS MULTI-TOUCH G3 PLUS**. C'est un sur-écran, détectant via un quadrillage de faisceaux infra-rouges les interactions entre l'utilisateur

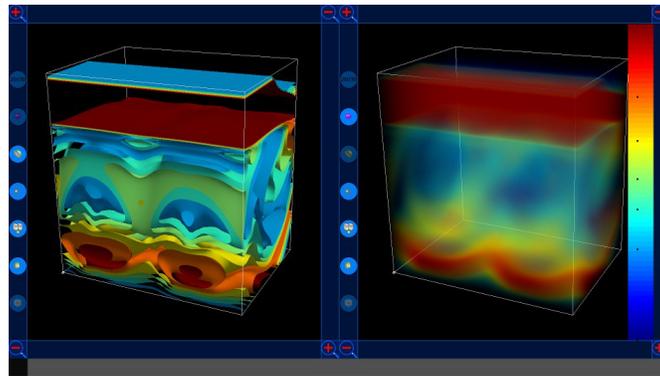


Figure 4.7 – Interface du logiciel, pour un champ 3D1C. Des isosurfaces sont représentées à gauche, et le champ volumique est représenté à droite.

et l'écran. Ces interactions sont passées par une interface **TUIO** [92]. L'interface a été développée afin de proposer les fonctionnalités majeures présentées précédemment. Les fonctionnalités de navigation sont assurées par le système **F13D**. L'interface générale est présentée figure 4.7. Pour permettre à la fois le rendu volumétrique et la visualisation par isosurfaces, d'un champ scalaire (**F2**), ou de permettre la comparaison entre deux champs différents, le choix a été fait de séparer en deux l'espace de visualisation. Les deux régions principales de visualisation possèdent un jeu propre de widgets **F13D** pour permettre, le cas échéant, le contrôle indépendant de la vue. Le coté droit de la vue contient la légende de couleur. Interagir avec cette barre permet de contrôler en temps réel les valeurs associés aux isosurfaces (**F3**), symbolisées visuellement par des points. Il est possible de rajouter (par un double-clicquant sur la barre, ce qui ajoute une valeur), supprimer (en faisant glisser un point hors de la barre) et contrôler (en faisant glisser le point le long de la barre) des isosurfaces et leurs valeurs associées.

Interactions avancées

En plus des interactions standards multi-dimensionnelles avec un jeu de données 3D, nous avons implémenté un certain nombre de fonctionnalités spécifiquement dédiés à la communauté des mécaniciens des fluides. Ces modalités, contrôlées par les utilisateurs, sont activables par des widgets déportés sur le cadre, afin qu'un utilisateur ne puisse les activer par erreur [21, 160]. Par conséquent, les widgets ne polluent pas l'espace d'exploration (**F9**).

Une des fonctionnalités majeures est la manipulation de plans de coupe (**F5**). Manipuler un plan de coupe demande de contrôler deux rotations et une translation – selon la normale – soit trois nouveaux degrés de liberté. qui se rajoutent donc aux sept degrés de liberté nécessaire à l'exploration du jeu de données identifiés auparavant. Ces degrés de liberté doivent, idéalement, pouvoir être manipulés en même temps que les sept degrés de liberté nécessaire à l'exploration du jeu de données identifiés auparavant, et de préférence dans un espace d'interaction unique. Le paradigme d'interaction utilisé ne contraint pas l'utilisation de techniques d'interaction à trois doigts. Nous avons donc utilisé l'approche de Reisman *et al.* [141] pour la manipulation de plans, *i.e.* une interaction bi-manuelle

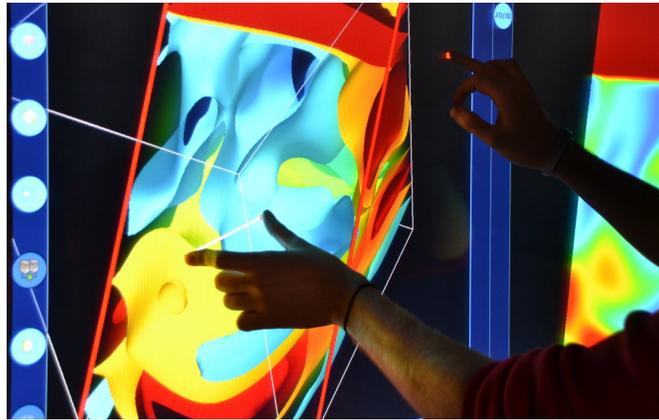


Figure 4.8 – Plan de coupe, manipulé par une interaction bi-manuelle : deux doigts définissent un axe dans le plan de coupe, puis le troisième doigt contrôle la rotation autour de cet axe.

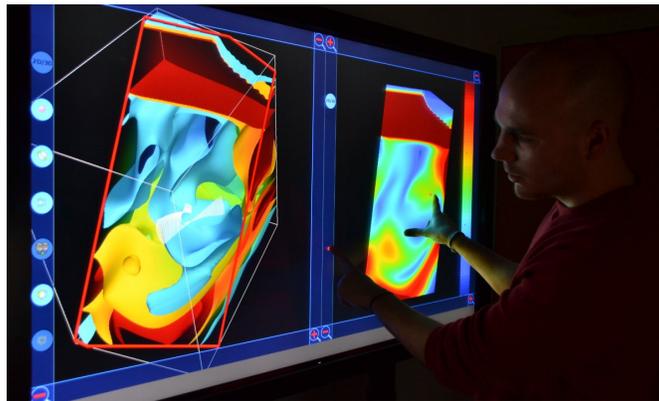


Figure 4.9 – Plan d’effacement, manipulé par une interaction bi-manuelle : deux doigts définissent un axe dans le plan de coupe, ici dans le but de le sélectionner, puis le troisième doigt contrôle la translation du plan de coupe.

illustrée sur la figure 4.8. Deux doigts de la main non-dominante forment un axe sur le plan, tandis que le troisième doigt contrôle soit la rotation du plan autour de l’axe défini si le mouvement est fait dans la zone d’interaction, soit la translation du plan, selon sa normale, si le mouvement est fait dans un des cadres de l’interface (voir figure 4.9).

Outre la manipulation de plan de coupe, nous avons implémenté la possibilité, dans le second espace de travail, d’avoir la vue en aplat du plan de coupe (**F5**). Cette fonctionnalité est visible dans le second espace de travail de la figure 4.9. Cela permet à la fois des interactions spécifiques avec le plan, et la manipulation du plan sans occulter la vue 3D, lorsque les deux espaces de travail sont asservis. Cette vue permet également de manipuler précisément (*cf.* figure 4.10) l’injection de particules – par simple ou double activation d’un widget – le long d’une sphère ou d’une droite coupant les données volumiques. Le couplage des deux vues en 3D et en 2D permet également de contourner le problème du positionnement 3D lors de l’injection de particules, toujours délicat lors de

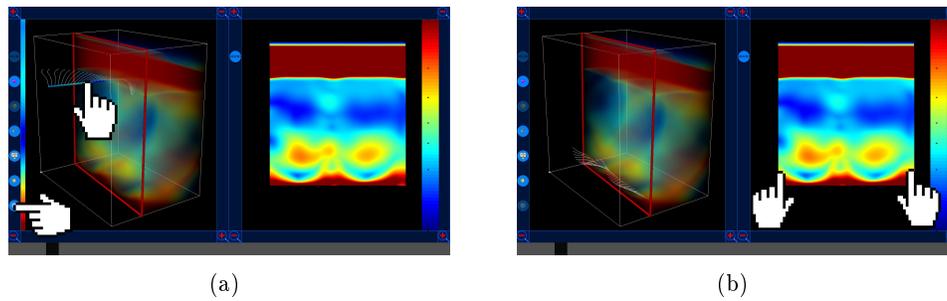


Figure 4.10 – Contrôle bi-manuel de l'injection de particules dans l'écoulement, afin de visualiser les lignes de courants et leur évolutions temporelles. (a) Placement d'un jeu de particule perpendiculaire au plan de coupe. Le widget correspondant à l'ensemencement par particules est sélectionné. (b) Positionnement par manipulation bi-manuelle du jeu de particule dans le plan de coupe.

l'interaction 3D en utilisant des surfaces - donc en deux dimensions.

L'ensemencement par particules permet de visualiser les lignes de courant (**F7**) dans la vue en 3D. Cette technique permet de révéler les structures et leurs propriétés spatio-temporelles des données. En particulier, les propriétés de vorticités (*i.e.* les propriétés tourbillonnaires) du champ de vitesse (**F2**) peuvent être révélées. Afin d'aider à cette visualisation, l'hélicité le long de la trajectoire, lorsque peu de trajectoires sont simultanément affichées, est également implémentée, sous la forme d'un ruban. Lorsque ce ruban tourne sur lui-même, cela indique une région possédant d'importantes propriétés tourbillonnaires. Les propriétés de divergence, particulièrement pertinente lorsque l'on étudie le champ 3D1C d'exposants de Lyapunov, sont également illustrée par l'écartement relatif des particules. Cette injection, le long de l'axe peut se faire dans le plan (figure 4.10(b)) de coupe, par interaction bi-manuelle pour définir la droite, ou perpendiculaire au plan, en n'utilisant qu'un doigt pour positionner l'intersection entre la ligne et le plan. Dans le cas d'un ensemencement autour d'une sphère, l'utilisation de trois doigts au lieu d'un permet de modifier son rayon. La densité de particules, le long de l'axe ou sur la surface de la sphère, peut être également modifiée, en utilisant les bordures comme barre de glissement.

Interaction temporelle

L'interaction temporelle est basée sur une barre de défilement, située au bas de l'interface (voir figure 4.7). Le choix du pas de temps se fait par le contrôle du curseur sur la barre. Lancer la simulation peut se faire par glissement (flip-dragging) jusqu'à la barre, soit par un bref toucher de la barre. De manière similaire, stopper le temps peut se faire en faisant glisser le curseur hors de la barre. L'interaction temporelle permet également de suivre l'évolution temporelle de lignes de courants, basée sur la position initiale de l'ensemencement. La position et les lignes de courants sont gardées en mémoire, ce qui permet de suivre leur mouvements au fil du temps. Lorsque des interactions sont faites avec les données, la simulation temporelle est stoppée pour des raisons de performances, et reprend dès que les interactions sont terminées.



Figure 4.11 – Collaboration colocalisée entre experts.

Collaboration colocalisée

La présence de deux vues différentes et configurables, ainsi que le support multi-points (32 points maximum simultanés) permet la collaboration simultanée de deux personnes. En particulier, les widgets **Fr3D** peuvent être indépendamment utilisés. La visualisation (volumétrique, par isosurface, par plan de coupe) est aussi découplée pour chaque fenêtre. Chacune des vues peut être également utilisée indépendamment ou de façon coordonnée. Dans ce cas, les interactions de navigation dans une vue sont répliquées dans l'autre vue, afin de montrer la même vue géométrique. Ces différentes possibilités permettent un large spectre d'utilisation de la plateforme, dans des configurations maître-esclave, de travail indépendant ou de visualisation partagée.

4.3.2 Évaluation qualitative de l'interface

L'interface a été réalisée avec un retour permanent d'utilisateur-experts [118]. Néanmoins, une étude qualitative et observatrice, utilisant la méthodologie de Carpendale [24] a été menée. Le choix d'une étude qualitative est lié à l'intégration de nombreuses et différentes techniques d'interactions et de visualisations, parfois déjà explorées, comme le *multi-touch* pour l'exploration [143, 97]. Une étude mesurant l'influence de chaque paramètre est donc hors de portée. De plus, par l'étude de paramètres indépendants et contrôlés, il est délicat de mesurer et prédire comment les utilisateurs vont appréhender le système global [61]. Nous avons demandé à sept experts (6 masculins, 1 féminin, âgés de 26 à 57 ans, avec un âge médian de 39 ans), dont cinq non-impliqués dans le développement, de participer à une longue session d'évaluation. Les participants ont été séparés en trois groupes **G1**, **G2** et **G4**, plus une personne seule **G3**. Une session d'évaluation dure typiquement entre une heure trente et deux heures.

Après une courte introduction concernant l'évaluation, les sujets ont pu prendre en main l'interface sur un jeu de données simple. Ensuite l'exploration d'un jeu de données complexes a été proposée aux participants. Les données étaient un champ 3D1C de FTLE (voir chapitre 2) ainsi que le jeu de vitesse correspondant, sur un écoulement de cavité. Tous les participants étaient habitués aux types de données et de visualisations proposés. **G1**, **G3** et une personne du groupe **G4** connaissaient plus particulièrement le jeu de données utilisé, tandis que la seconde personne de **G2** est un expert des simulations numériques. Durant l'utilisation de l'interface, les participants étaient encouragés

à penser à voix haute, et pouvaient poser toutes les questions à l'expérimentateur. Ils étaient parfois interrompus pour que des questions leur soient posées sur leurs actions, et certaines fonctionnalités leur étaient rappelées (afin de réduire les effets d'apprentissage). Après cette phase exploratoire, un entretien semi-guidé a été réalisé avec les participants, afin de discuter de leurs impressions en détail, en particulier les différences avec leurs outils d'analyse standard, et des retours potentiels sur l'interface proposée. L'entretien se conclut sur un questionnaire portant sur les détails démographiques, et leurs connaissances précédentes sur l'utilisation d'outils de visualisations scientifiques, notés sur une échelle de Likert à cinq points. L'expérience entière était filmée.

Deux catégories de remarques sont sorties du lot :

- Propositions d'interactions
- Implication pour le design d'outils d'explorations scientifiques

Un retour important, relevé par tous les utilisateurs, est la difficulté d'orienter correctement et facilement le plan de coupe.

4.3.2.1 Propositions d'interactions

Malgré quelques problèmes inhérents à un prototype, les participants se sont montrés enthousiastes et ont proposé l'ajout de nombres d'outils supplémentaires pour rendre l'interface encore plus utile en pratique. Une demande fréquente était par exemple la possibilité de pouvoir définir une vue et position par défaut, et de pouvoir y retourner automatiquement à volonté. L'association avec un mouvement précis, permettrait une réinitialisation intelligente du système. Afin d'explorer le champ de vecteur, les experts ont proposé que soit affiché selon une droite traversant le volume ou sur le plan de coupe le champ 2D de vecteur, et non les lignes de courants. Pouvoir passer à volonté sur différentes valeurs des données (par exemple une composante du champ de vitesse, sa température, son champ de pression *etc.*) est également une importante extension à considérer. Une autre proposition est la possibilité d'enregistrer une séquence exploratoire, afin de la reproduire automatiquement dans l'exploration d'un autre jeu de données. Plusieurs autres sujets ont également proposé que les plans puissent rester parallèles aux axes des données, afin de se déplacer spatialement précisément.

4.3.2.2 Implications pour le développement d'outils d'exploration de données scientifiques

Deux aspects importants sont ressortis de cette étude, par le retour d'experts. Le premier est l'importance de la manipulation directe et de la fluidité de cette manipulation pour les experts. La manipulation directe a été citée comme devant être absolument maintenu, car amenant un grand confort pour l'exploration des données. La transparence est fondamentale pour une bonne utilisabilité (*e.g.* un utilisateur a précisé qu'une latence plus importante compromettrait une utilisation de l'interface), la facilité de prise en main de l'outil a été unanimement relevée, à l'exception notable de la manipulation de plans de coupe. Ajouter des possibilités et des outils d'exploration rendraient nécessairement plus complexe l'interface. Les gestuelles tactiles ne peuvent rester forcément intuitives dès lors que le nombre d'interactions nécessaires augmente. Les sujets se sont néanmoins accordés à dire que l'exploration de données peut aller de pair avec la découverte et la maîtrise d'une interface complexe et, si nécessaire, modérément modale.

L'exploration combinée 2D et 3D, comme attendu, a été jugée fondamentale pour une bonne compréhension des données. Le positionnement des particules virtuelles servant à ensemençer l'écoulement par le plan de coupe, bien que moins directe que dans certaines techniques de suivi en 3D (dans une CAVE ou par utilisation d'un bras haptique, par exemple), a néanmoins été apprécié par les participants (avec une moyenne supérieure à 4 sur l'échelle de Likert).

La collaboration n'était pas un objectif initial du développement, mais s'est révélée être une fonctionnalité importante. Elle a été spécifiquement observée lors de l'évaluation. La collaboration a été appréciée, avec une note moyenne supérieure à 4 sur l'échelle de Likert. En particulier, le groupe **G3** (un seul individu) a dit regretter d'utiliser seul le dispositif, alors que la question de la collaboration n'avait pas été abordée par les expérimentateurs. La collaboration entre experts a été principalement verbale, *i.e.* la discussion autour des propriétés physiques de l'écoulement qu'ils considéraient. Les experts ont particulièrement apprécié la colocalisation de leurs interactions. La conscience des actions de l'autre les a "naturellement amené à collaborer", selon leurs propres termes. Néanmoins, les modalités d'interactions étaient différentes en fonction des groupes. Pour le premier groupe **G1**, la collaboration se faisait en manipulant et commentant simultanément les données, et aucune interférence n'a été notée. Pour le deuxième groupe **G2**, au contraire, les experts utilisaient alternativement le dispositif en discutant. Ils ont précisé dans les discussions suivant l'utilisation de l'interface, que c'était par peur de gêner l'autre et d'interférer dans ses manipulations. Le groupe **G4** avait un comportement intermédiaire, se relayant naturellement tout en discutant. Ces bonnes propriétés de collaborations de notre dispositif semblent en désaccord avec les travaux de Rogers et Lindleys [146]. Ils affirment qu'un dispositif vertical rend la collaboration difficile et désagréable. Nous avons donc demandé aux participants si ils auraient préféré travailler sur le même dispositif, mais orienté horizontalement (le plateau étant orientable). Tous ont affirmé qu'ils auraient moins appréciés cette configuration, et qu'ils préféreraient la position verticale (ou légèrement inclinée). Pour l'exploration de données scientifiques, on peut donc en supposer que l'orientation verticale est plus adaptée à la collaboration. Plusieurs hypothèses permettent d'expliquer cette apparente contradiction avec Rogers & Lindleys [146]. La première est que les données étaient orientées conformément à la situation physique. La seconde est l'habitude des experts de collaborer devant des tableaux, l'orientation mimant cet outil classique de travail.

4.4 Interaction à base d'objets tangibles

Explorer un environnement virtuel est maintenant une activité quasi-quotidienne, que l'on retrouve dans de nombreux domaines. Dans le contexte de l'exploration de données scientifiques, une exploration interactive, alors que les données sont en 3D, et parfois dépendantes du temps, reste une exception. Le cas échéant, les interfaces généralement proposées nécessitent des infrastructures importantes, telle qu'une CAVE [27], et des techniques de suivi externe. Dans le cas contraire, les travaux sur la visualisation scientifique reposent en général sur des représentations 2D, de par l'utilisation d'écrans, malgré la complexité inhérente à la restriction de données 3D [167, 66, 99]. Si une partie des contraintes peuvent être levées par l'utilisation de métaphores spécifiquement conçues (*e.g.* Stenholt *et al.* [165]), des indications, de longues périodes d'apprentissage et des

métaphores complexes sont souvent nécessaires pour l'accomplissement des tâches [19]. L'interface proposée dans la section 4.3, malgré une interface affordante, a ainsi montré certaines limites, notamment pour la manipulation des plans de coupe. La raison majeure est, lorsque les métaphores les plus usitées sont déjà utilisées pour la navigation dans les données, les métaphores supplémentaires sont *de facto* complexes et non intuitives. Dès lors que les métaphores ne sont pas intuitives, il devient délicat pour un utilisateur d'utiliser des métaphores nécessitant la maîtrise simultanée d'un grand nombre de degrés de liberté. Comment, tout en gardant un contrôle sur les autres fonctionnalités importantes du système (*cf.* les fonctionnalités définies dans la section 4.3), permettre la mise en correspondance des degrés de liberté de l'exploration 3D et des degrés de liberté à disposition sur les systèmes habituels [173, 75]? L'importance de la transparence, et de la manipulation directe des données, comme précisée dans la section précédente est néanmoins fondamentale, et est impérativement à conserver. La suite de ce chapitre présente mes travaux sur des métaphores permettant, expressément, la navigation dans des données complexes (typiquement issues de mécanique de fluides). Ces métaphores ont été spécifiquement conçues afin de libérer les métaphores usuelles, principalement tactiles. Ainsi, l'utilisation de l'écran tactile et de l'espace de visualisation pourra être *totale*ment dédiée à l'interaction complexe (gestion du temps, manipulation des valeurs des isosurfaces du champ d'exposants de Lyapunov à temps fini *etc.*).

Nous avons ainsi proposé l'utilisation d'objets tangibles, c'est-à-dire manipulables, pour l'exploration de jeux de données. La raison fondamentale est de faire correspondre les degrés de libertés du système et les degrés de libertés de l'exploration. Dans la partie 4.4.1, le "tangible" est une tablette tactile. Cette solution permet également, en identifiant la tablette à un plan dans l'espace virtuel, de répondre à la difficulté de manipulation de plan de coupe relevé dans la section 4.3. Dans la section suivante 4.4.2, le procédé est généralisé à l'utilisation de divers outils, en particulier un objet de référence ancrant les données dans le monde réel, permettant *de facto* une manipulation *directe* des données.

4.4.1 Une fenêtre vers des données scientifique en réalité virtuelle

Cette première métaphore utilise une tablette tactile comme une fenêtre tangible vers un univers *quelconque* en réalité virtuel. Sur la figure 4.12 est illustrée le principe : l'utilisateur regarde l'écran, qui donne sur l'univers à explorer. Déplacer la tablette déplace la vue. Se mouvoir dans l'espace réel entourant l'expert revient donc à se mouvoir dans l'espace virtuel, révélé au travers de cette fenêtre. Dans le cadre de la visualisation scientifique, l'univers à explorer est constitué de données scientifiques, tel qu'un champ d'exposants de Lyapunov à temps fini (*cf.* le chapitre 2 ou la section 3.7).

Une telle métaphore a été proposée par Tsang *et al.* [175] et Scarpa *et al.* [117]. Néanmoins, le suivi de la tablette était une importante limitation dans ces travaux. Tsang *et al.* [175] utilisaient un bras mécanique pour connaître la position de la tablette, limitant ainsi l'espace de travail. Ces limitations ne concernent pas le projet (T)eather [117], mais leur implémentation nécessite une pièce spécialement équipée de capteurs de position. Le projet (T)eather, ainsi que les travaux de Scarpa, n'ont en outre pas été suivis d'une validation expérimentale.

Dans cette partie, nous proposons une approche différente des deux précédentes. L'u-

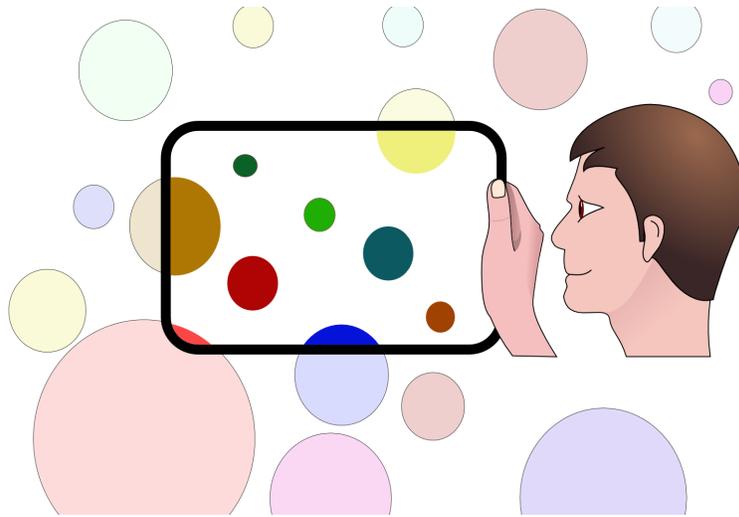


Figure 4.12 – Fenêtre vers un environnement virtuel.

utilisation des capteurs internes (la centrale inertielle) supprime les limitations précédentes concernant l'espace de travail, tout en permettant une grande portabilité du système. Une validation expérimentale est conduite, afin de vérifier si l'exploration d'une scène virtuelle au travers d'une fenêtre tangible est, d'une part, appréciée par l'utilisateur, et d'autre part si cette exploration est bien plus efficace. Être libéré des contraintes précédemment citées implique quelques améliorations. La légèreté d'une tablette tactile permet de présupposer une navigation et une exploration facile de la scène. En liant les trois degrés de liberté de rotation de la tablette au vecteur d'orientation de la scène, on espère une amélioration de la transparence, c'est-à-dire le caractère intuitif de la manipulation par l'utilisateur, des métaphores d'exploration. Les rotations sont captés par les gyroscopes internes de la tablette. Ainsi, les trois degrés de libertés en rotation sont les mêmes dans l'espace de l'utilisateur et dans l'espace virtuel. La complexité de l'interaction est donc plus faible [173]. De plus, la métaphore utilisée étant plus naturelle, une meilleure réactivité des sujets, et une phase d'apprentissage plus courtes sont attendues. Faire correspondre les degrés de rotations amène un autre avantage. Les faibles rotations créées par l'utilisateur permettent un effet de parallaxe, présent continuellement, ce qui apporte une bonne perception de la profondeur. La représentation 2D est en fait perçue comme une scène 3D. Typiquement, les champs de données 3D, en mécanique des fluides, tels que le champ vitesse sont fortement structurés dans toutes les directions, y compris dans la profondeur (les figures de la section 3.6.4 en sont un exemple). Contrairement à une méthode de visualisation classique, on s'attend donc à une amélioration de la perception et de la compréhension spatiale de la part des utilisateurs.

4.4.1.1 Protocole et conditions de l'expérience

Scène virtuelle

Produire une scène issue de la mécanique des fluides (*e.g.* un champ d'exposants de Lyapunov à temps fini) constitue un biais potentiel dans le cadre d'une expérience où les sujets ne sont pas des experts mécaniciens. J'ai donc proposé une scène dont les

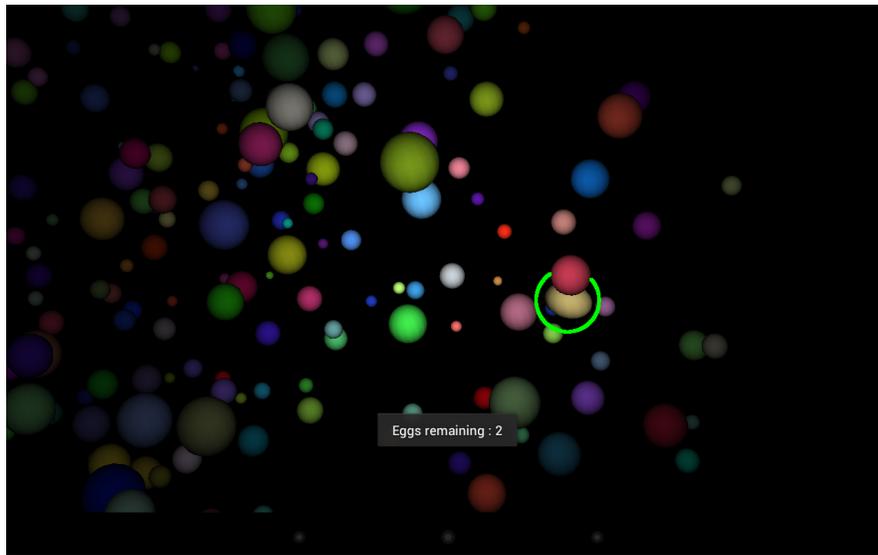


Figure 4.13 – Vue générale du logiciel. Un œuf a été trouvé par le participant.

propriétés sont similaires à des données scientifiques, mais admissibles pour un public non-expert. La scène est composée de (500) sphères. La position, la couleur et le diamètre des sphères sont définis aléatoirement au moment de la création de la scène. Chaque sphère peut ainsi être considérée comme une propriété locale des données (par exemple, le centre d'un tourbillon, un point chaud, une nappe d'isosurface du champ d'exposants de Lyapunov à temps fini *etc.*).

La lumière est plus forte au centre de la vue, comme si le sujet tenait une lampe torche. Donner aux participants une vision partielle de leur environnement périphérique permet de les inciter à explorer la scène. Quelques œufs (3) sont disposés aléatoirement dans la scène. Comme pour les sphères, leurs diamètres, couleurs et positions sont aléatoires. Chercher les œufs force donc les sujets à naviguer dans le monde virtuel. Le choix de cibles sous forme d'œufs est la difficulté, selon certains points de vue, de discriminer un œuf d'une sphère. Cela revient à rechercher une propriété précise dans des données complexes. Une fois trouvé et pointé par le sujet, les œufs sont repérés par un cercle vert. Une vue typique de la scène est illustrée sur la figure 4.13.

Hypothèses

Nos hypothèses principales sont donc que les sujets explorent une plus grande partie de l'environnement avec la métaphore par fenêtre tangible (hypothèse **H1**). On espère que trouver une cible prenne moins de temps avec la métaphore par fenêtre tangible (**H2**). La volonté que l'interface proposée puisse être diffusée dans la communauté implique que les sujets doivent également préférer la métaphore par fenêtre tangible (**H3**).

Conditions

Le scénario est de trouver un œuf le plus rapidement possible, bien que les participants soient autorisés à continuer jusqu'à la fin du délai. La condition **C1** correspond à la métaphore proposée sous forme de fenêtre vers le monde virtuel. Pour la condition compar-

ative **C2**, les rotations sont réalisées par des mouvements familiers sur tablettes tactiles, de type “game pad controller”. En pratique, les dérivées de l’évolution des deux angles principaux de rotations sont déterminées par un joystick-widget. Les déplacements, dans la direction de la caméra, sont contrôlés par une barre de glissement, en avant comme en arrière. Les capteurs de translations de la tablette étant trop peu précis, la métaphore sur le déplacement, pour les deux conditions, est identique. L’exploration n’est pas, en soit affectée par l’absence des déplacements latéraux. Seul le déplacement dans la direction de la caméra est donc autorisé. Les directions spatiales sont bien sur isotropiques.

Matériel et Logiciel

L’expérience a été réalisée sur une tablette **NEXUS 7**. Sa masse est de 340g. Le logiciel est un moteur de rendu **OPENGL ES 1.1**. Les rotations sont mesurées par les gyroscopes internes de la tablette.

Participants

Quatorze participants (masculins) ont passé l’expérience, provenant du Laboratoire pour l’Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l’Ingénieur (Université de Paris-Sud), âgés entre 20 et 27 ans. L’âge moyen était de 24 années (déviation standard $\sigma = 2$ ans).

Mesures

Les données suivantes ont été mesurées pour chaque passage, quelque soit la métaphore utilisée :

MO1 : Nombre d’œufs trouvé au fil du temps

MO2 : Déplacement au cours du temps

MO3 : Angle parcouru au cours du temps

En plus de ces relevés objectifs, nous avons demandé aux participants de compléter un court questionnaire, sur une échelle de Likert à 5 points, pour l’évaluation des métaphores, afin de compléter l’expérience par des mesures d’appréciation :

MS1 : Facilité de déplacement

MS2 : Facilité de rotation

MS3 : Facilité de trouver les œufs – Difficulté de la tâche

MS4 : Facilité de se repérer dans les données

Procédure

Les participants étaient assis sur une chaise de bureau (permettant une libre rotation), et pouvaient tenir la tablette de la façon dont ils le souhaitaient. Aucune rémunération n’a été offerte. Avant l’expérience, nous avons présenté brièvement les deux métaphores. L’expérience commence par un court entraînement. Quelque soit la condition, les sujets doivent trouver autant d’œufs que possibles. Après 160s, l’essai en cours s’arrête. Le scénario est répété trois fois pour chaque condition, et l’expérience se termine avec le questionnaire.

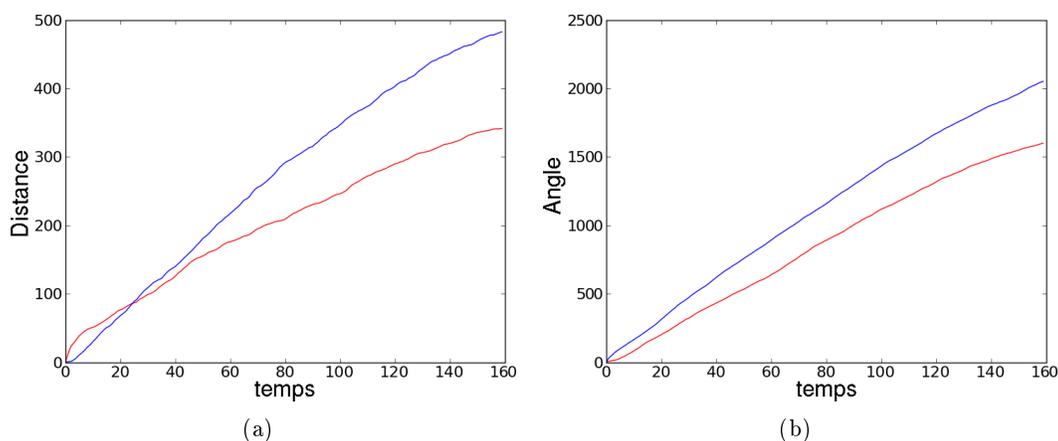


Figure 4.14 – Les courbes bleues correspondent à l’utilisation de la tablette comme d’un objet tangible, les courbes rouges pour la navigation tactile. (a) : Distance moyenne parcourue par les participants, par rapport au temps, jusqu’au temps final. (b) : Moyenne de l’angle vu par les participants, par rapport au temps et jusqu’au temps final.

4.4.1.2 Résultats

Les populations ne respectant pas une loi Gaussienne, dans la suite, on utilise le test des rangs signés de Wilcoxon pour les validations statistiques. Le temps pour réaliser la tâche (pour **MO1** = 1), est en moyenne ($t = 70.3s$), 23.4% plus faible lorsque les sujets utilisent la tablette tangible comme une fenêtre. La p-value est de $p = 0.091$ en comparant avec le temps des sujets utilisant la condition **C2** (temps moyen de $t = 86.8s$). Trouver un oeuf implique d’explorer la scène. Cela montre donc que la métaphore proposée est meilleure pour les tâches d’exploration. Lorsque l’on considère le déplacement **M02** (cf. figure 4.14(a)) on remarque que les participants se sont déplacés plus avec cette métaphore. La différence moyenne est en effet de 40.0%. Le résultat est très significatif, avec une p-value $p \ll 0.01$. Comme attendu de la part d’une métaphore liant les degrés de rotations réels et les rotations du monde virtuel, l’angle vu **MO3**, sur la figure 4.14(b), est également significativement plus grand avec notre méthode. La différence moyenne est de 29.0% à la fin de l’expérience, avec une p-value hautement significative $p \ll 0.01$. L’hypothèse de l’expérience **H1** est donc vérifiée. Les rotations de l’espace et de la fenêtre étant identiques et centrées sur le tangible, ce résultat est en accord avec les travaux de Ware & Rose [177] sur le domaine concernant la colocalisation.

Considérons maintenant la population des participants ayant trouvé un œuf, au cours du temps. La courbe représentant cette fraction est présentée figure 4.15. Deux temps caractéristiques sont identifiables sur cette courbe, permettant de séparer le processus exploratoire en trois phases distinctes. Jusqu’au temps $t \approx 40$ s, les courbes, suivant la méthode tactile ou la métaphore par objet tangible ne présentent pas de différences. Les participants trouvent un œuf, par chance près de leur position initiale. Ensuite, jusqu’au temps $t \approx 70$ s, l’écart entre les conditions **C1** et **C2** ne fait que croître. C’est une phase d’exploration après la phase de découverte de l’environnement proche, où l’influence de la métaphore choisie se fait le plus sentir. Ensuite, l’écart diminue. Un bon nombre de participants ayant déjà trouvé un œuf dans la métaphore proposée **C1**, tandis que

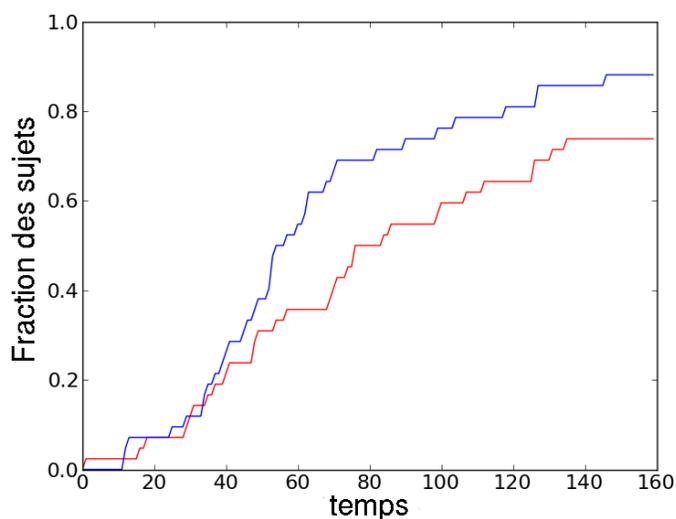


Figure 4.15 – Fraction des participants ayant trouvé au moins un oeuf, par rapport au temps. La courbe bleue correspond à l'utilisation de la tablette comme d'un objet tangible, la courbe rouge pour la navigation tactile.

les participants utilisant la métaphore tactile **C2** ne l'ont pas encore trouvé (test de McNemar hautement significatif, associé à une p-value $p = 0.0088$) et commencent à rattraper, finalement, leur retard en trouvant un des œufs. Dans la dernière partie, les différences ne sont ainsi plus significatives. Ainsi, les sujets trouvent plus rapidement un œuf en explorant la scène avec la métaphore tangible. L'hypothèse **H2** est bien vérifiée.

La mesure **MS2** montre que les sujets préfèrent significativement la métaphore tangible (p-value $p = 0.012$), ce qui valide notre hypothèse **H3**. C'est d'autant plus préféré que les sujets indiquent, par les réponses **MS4**, se repérer significativement mieux au travers de la métaphore proposée ($p = 0.037$).

Le fait que les sujets se déplacent plus dans l'espace virtuel avec la métaphore tangible n'était pas attendu, le déplacement étant, dans les deux conditions, lié au même widget. Concernant le déplacement, les sujets ne différencient pas les deux conditions, comme on peut le voir dans les boîtes de Tukey, figure 4.16 concernant le déplacement. Les boîtes sont comparables. Néanmoins, les sujets se déplacent plus. En effet, les sujets utilisent 96% plus le widget dans la métaphore tangible (une moyenne de 17.1 activations par minute dans le cas du premier scénario, à comparer à 8.6 activations par minute dans le scénario où les rotations sont contrôlées par le "game pad controller"). Néanmoins, le temps total pour se déplacer est deux fois inférieur. La vitesse moyenne de déplacement des sujets, dans le cas du premier scénario, est donc bien plus importante ((32,2% plus grande). Comme rappelé précédemment, la mesure **MS4** est significativement meilleure dans le scénario de la fenêtre tangible. Les sujets ont moins de difficulté à se localiser dans les données. Cela implique que les sujets savent mieux où se déplacer pour explorer de nouvelles zones de données. Les participants se déplacent donc directement dans une direction précise. De plus, dans la métaphore fenêtre tangible, les sujets ne passent que 28.8% du temps à ne rien faire (*i.e.* ne pas se déplacer), tandis qu'ils ne bougent pas pendant 40.5% du temps pour la condition **C2**. La différence est hautement significative

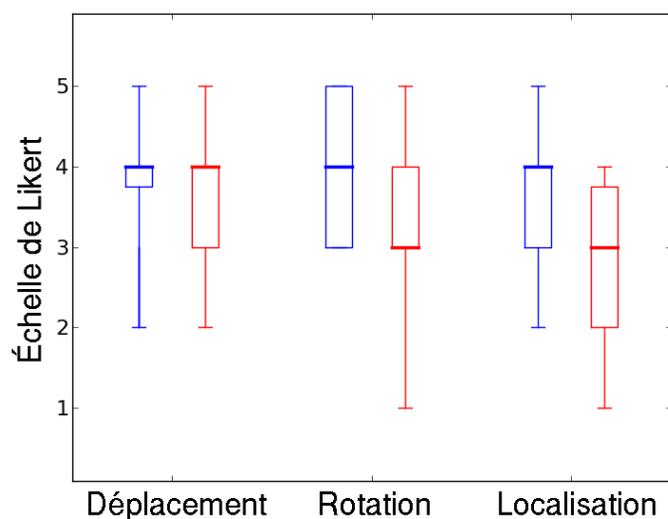


Figure 4.16 – Boîtes de Tukey pour les réponses subjectives. Les boîtes bleues correspondent à l'utilisation de la tablette comme d'un objet tangible, les rouges pour la navigation tactile. Le trait épais représente la médiane des données, et la boîte représente les 1er et 3ème quartiles. Les traits extrêmes représentent les valeurs maximales et minimales. Les couples de boîtes correspondent respectivement aux mesures **MS1**, **MS2** et **MS4**.

(p-value $p \ll 0.01$). La transparence de navigation est donc l'élément clé de cette amélioration, faisant écho aux travaux de Von Kapri *et al.* [93]. On peut noter, tableau 4.1, que les sujets se déplacent *et* tournent deux fois plus dans la condition **C1**. On voit également que, dans la condition **C2**, les sujets se déplacent *puis* tournent. Ces différences, dérivées des mesures **MO2** et **MO3**, sont hautement significativement différentes ($p \ll 0.01$). La

Tableau 4.1 – Modalité de déplacement durant l'expérience, en pourcentage du temps total.

| | Condition C1 | Condition C2 |
|------------------------|---------------------|---------------------|
| Rotation | 47.2% | 30.7% |
| Translation | 12.8% | 24.0% |
| Rotation + Translation | 11.2% | 4.80% |

métaphore proposée permet donc de contrôler, simultanément, plus de degrés de liberté que les interactions tactile. L'interface proposée est en fait plus *transparente* que l'interface tactile. Cette amélioration de la transparence est probablement la raison expliquant la véracité de l'hypothèse **H3**.

Les sujets, quelque soit la condition, ont trouvé délicate la tâche (la médiane de **MS3** est seulement de 2, avec une faible dispersion sur l'échelle de Likert). C'était un prérequis pour forcer les sujets à explorer la scène.

Bilan de cette méthode

La métaphore présentée, adoptant une approche interne de suivi, s'avère efficace pour évoluer dans un espace large. La tâche d'exploration induite *et* la tâche de recherche ont été

effectuées plus rapidement par les participants. De plus, les sujets ont apprécié naviguer avec cette métaphore, malgré le fait que les translations (les capteurs internes associés étant de médiocre facture) ont du être dirigées par une métaphore tactile. La méthode est conçue pour l'exploration de données scientifiques, la tâche étudiée étant similaire au travail d'un expert sur des données de mécanique de fluides. Néanmoins, l'évaluation a été réalisée dans un cadre plus générale d'univers virtuels. La tablette est utilisée ici comme un objet tangible. Des données scientifiques – mais le spectre d'utilisation dépasse ce cadre – occupent un univers virtuel. La manipulation de cet objet tangible permet l'exploration directe de cet univers. La prochaine étude relaxe deux contraintes de cette étude. L'univers virtuel n'est plus uniquement composé des données. D'autres objets peuvent être considérés pour interagir avec l'environnement.

4.4.2 Utilisation d'outils tangibles pour l'exploration d'un environnement en réalité augmentée

Dans la métaphore en réalité virtuelle présentée dans la section précédente 4.4.1, une tablette tactile est utilisée comme une fenêtre. Cette fenêtre est considérée comme un objet tangible, et déplacer ce tangible permet donc de se déplacer dans l'univers virtuel, *i.e.* les données de mécanique des fluides que l'expert veut explorer. La notion d'interaction tangible peut être appliquée directement aux données. Pour ce faire, on propose l'utilisation d'objets tangibles. Les objets tangibles sont des objets réels et physiques. Manipuler directement ces objets permet de manipuler directement les données. Dans une nouvelle approche, les données sont présentées derrière l'écran, et n'emplissent a priori pas l'univers. L'interaction peut donc se faire derrière l'écran, en plus de l'écran. Les données virtuelles sont superposées, sur l'écran, à l'image de l'objet tangible de référence. La manipulation d'objets tangibles permet donc la manipulation et l'interaction avec des données virtuelles, typiquement des données issues de simulations numériques (*e.g.* les figures de la section 3.6.4). Plusieurs objets tangibles peuvent être utilisés simultanément, pour augmenter les interactions, par exemple un stylet afin de gérer précisément le lâcher de particules, ou les plans de coupes, dans le cas d'exploration de données issues de la mécanique des fluides (comme dans la section 3.6.4, avec la présentation d'une comparaison entre des données 2D et 3D). Contrairement à Qi & Martens [139], l'utilisation d'une tablette permet une *colocalisation* entre les données et l'interaction. Cette colocalisation doit améliorer la performance des utilisateurs dans leurs tâches et la transparence de l'interface [177].

Plusieurs avantages sont attendus. En premier lieu, l'efficacité pour l'interaction 3D devrait être améliorée. L'utilisateur peut contrôler les six degrés de liberté de navigation dans l'espace 3D (c'est-à-dire toutes les rotations et les translations) sans avoir à utiliser des interfaces, telles qu'une souris ou un écran tactile. Un autre point attendu est la facilité d'utilisation. Il n'y a pas d'intrusion de capteurs externes tel que des outils de détections de mouvement ou de la tête. Toute l'interface est utilisée à mains nues, sans apprentissage. Manipuler un objet est en effet une tâche quotidienne. Un dernier point est la portabilité de l'interface, uniquement composée d'objets tangibles et d'une tablette tactile. Dans l'étude présentée, nous nous limitons à l'exploration de données 3D1C, tel qu'un champ d'exposants de Lyapunov à temps fini.



Figure 4.17 – Evolution de la forme du tangible de référence.

4.4.2.1 Présentation des objets tangibles

Deux objets tangibles ont été conçus. L'objet de référence, sur lequel se superpose les données, et un stylet. Ces tangibles, auxquels on peut rajouter la tablette – comme dans la section 4.4.1 – sont au cœur des principales métaphores d'interactions présentées par la suite, et sont repérés par des marqueurs de type **ARTOOLKIT**³. Le tangible de référence représente les données, et permet de les intégrer dans l'espace physique. Lorsque cet objet tangible est observé au travers de la fenêtre virtuelle, les données y sont superposées. Manipuler l'objet permet de manipuler directement les données. L'utilisateur peut donc, simultanément, tourner, zoomer et traduire les données, afin d'observer et repositionner les données. Cette fonctionnalité est étudiée section 4.4.2.4. La forme de l'objet est issu d'une étude itérative fonctionnelle, ergonomique et technique, afin de pouvoir le manipuler et l'orienter à une main. On peut voir l'évolution de la forme du tangible de référence sur la figure 4.18. Le tangible planaire a immédiatement été rejeté. La forme cubique, utilisée pour des raisons d'affordance [57], *i.e.* la forme suggère l'utilisation, a ensuite été améliorée pour prendre la forme d'un hexaèdre tronqué pour deux raisons principales. La première, technique, est pour s'assurer qu'il y ait toujours un marqueur face à la caméra. La seconde, ergonomique, est d'avoir un objet dont la forme facilite la rotation lorsque l'utilisateur tient le cube d'une seule main.

Le stylet a été conçu afin de permettre une exploration multi-échelle des données. Alors que le tangible de référence propose essentiellement une exploration globale des données, centrée autour du positionnement et de l'observation, le stylet a pour but une exploration fine et plus précise des données. La première interaction, affordante car suggérée par la forme, est le pointage d'une zone précise dans les données, permise par la forme longue et pointue du stylet tangible. Pour ne pas interférer avec le tangible de référence, la pointe active du stylet est virtuellement allongée de quelques centimètres. Cette utilisation est d'autant plus précise que les utilisateurs sont particulièrement dextres avec l'utilisation d'un objet issu de la vie quotidienne. Dans le système proposé, le stylet offre deux principales possibilités d'interactions avec les données. La première est le lâché de particules en un point précis des données. La seconde, étudiée dans la section 4.4.2.5, est la manipulation de plans de coupe.

La tablette est elle-même un objet tangible. Elle permet une exploration assez proche de l'objet tangible de référence. On peut en effet l'utiliser pour tourner autour des données

3. <http://www.artoolworks.com/products/mobile/>



Figure 4.18 – Manipulation de plan de coupe par le stylet tangible.

ou encore zoomer en s'approchant. Lorsque l'on s'approche suffisamment des données, une métaphore d'exploration par plan de coupe a été implémentée (voir la section 4.4.2.5). La tablette se comporte alors comme un plan de coupe virtuel, que l'on peut manipuler directement dans les données. Le plan de coupe peut être, comme demandé par les utilisateurs durant l'expérience présentée section 4.3, verrouillé à un des axes des données. La manipulation combinée avec le tangible de référence est évidemment toujours possible dans cette modalité.

Pour valider les modes d'interactions proposés ainsi que le concept d'exploration de données par objets tangibles, deux expériences ont été menées. La première concerne l'utilisation de l'objet tangible de référence. Il s'agit de vérifier si le positionnement en 3D est plus performant avec l'utilisation d'objets tangibles. La seconde concerne l'utilisation du stylet comme outil d'assistance pour la manipulation de plan de coupe.

4.4.2.2 Implémentation

La position et l'orientation de l'objet virtuel sont asservies à celles de l'objet tangible de référence. La camera virtuelle de la scène correspond donc à la caméra arrière de la tablette. L'objet virtuel est superposé à l'image de fond, capté par la caméra arrière. Apparaissant comme au travers d'une fenêtre virtuelle incarnée par la tablette, l'objet virtuel est placé à la place de l'objet tangible de référence (*cf.* figure 4.19).

4.4.2.3 Modalité de visualisation des données

Les données 3D peuvent être visualisées selon deux modes illustrés figure 4.20, comme dans l'interface tactile présentée section 4.3 (voir par exemple la figure 4.7). Le premier correspond à une visualisation volumique d'un champ de données scalaires (ici un champ d'exposants de Lyapunov à temps fini, présenté chapitre 2), tandis que le second

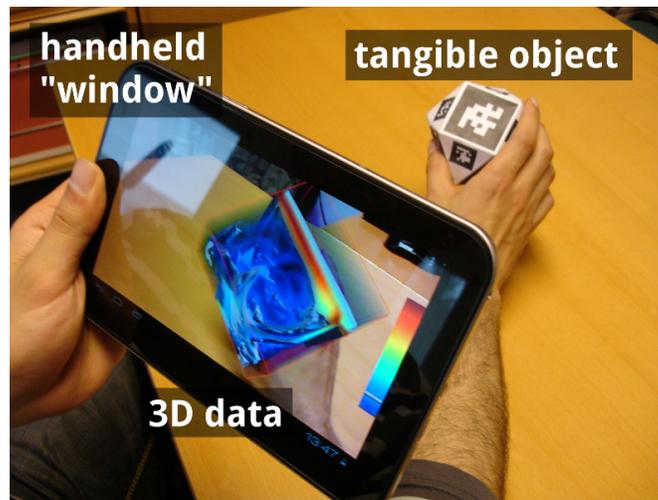


Figure 4.19 – Vue typique de données de mécanique des fluides en réalité augmentée.

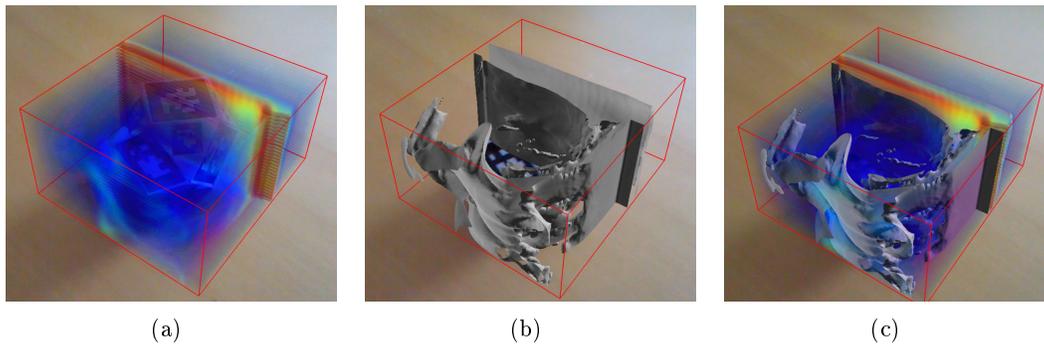


Figure 4.20 – Les différents modes de rendu. (a) : rendu volumique. (b) : rendu par isosurface. (c) : rendu mixte.

représente les données par des isosurfaces. Les deux modes peuvent être activés simultanément. Les techniques de rendu et de manipulations d'isosurfaces sont – dans la mesure du possible sur des interfaces portables – similaires à celles présentées parties 4.3.

4.4.2.4 Evaluation du positionnement 3D

L'évaluation des performances du positionnement 3D est indispensable pour valider notre proposition d'interaction en réalité augmentée avec des données complexes par objets tangibles. L'exploration, pour des données 3D, passe principalement par la rotation et la translation des données dans l'espace 3D. Pour évaluer ces performances, nous avons donc choisi une tâche de positionnement d'objets.

4.4.2.4.1 Protocole et conditions de l'expérience

Conditions

Le positionnement se fait en utilisant la tablette tactile comme écran. Pour la com-

paraison, deux autres systèmes classiquement utilisés sont également évalués. Le premier est l'écran tactile lui-même, choisi plutôt qu'une souris. Les métaphores tactiles choisies pour la manipulation sont les plus classiquement utilisées, à savoir principalement le "pinch-zoom", utilisé pour la rotation dans le plan, et les trois translations, les rotations hors du plan se faisant à un seul doigt. Le second système utilisé est un souris 3D. Nous avons choisi ce type de souris car c'est le principal outil à six degrés de libertés (les trois rotations et les trois translations sont mesurables) disponible commercialement, et qu'il est modérément utilisé dans le monde professionnel (CAO principalement). Les trois conditions sont donc :

C1 : L'utilisation d'objets tangibles comme métaphore pour effectuer la tâche de positionnement.

C2 : L'utilisation de l'écran tactile comme métaphore pour effectuer la tâche de positionnement.

C3 : L'utilisation d'une souris 3D comme métaphore pour effectuer la tâche de positionnement.

Il est à noter que la métaphore **C3** correspond à une méthode d'interaction isométrique (*i.e.* l'utilisateur contrôle la vitesse de rotation), alors que les métaphores et **C2** correspondent à une méthode isotonique (*i.e.* l'utilisateur contrôle directement les rotations). En suivant les recommandations de Zhai [180], ce biais n'est pas le sujet de l'étude, mais bien l'utilisabilité pour une tâche donnée.

Hypothèses

Notre volonté de proposer une métaphore efficace impose que la métaphore la plus rapide pour positionner un objet est l'utilisation d'objets tangibles (hypothèse **H1**). On suppose également que la trajectoire, lors du positionnement, est plus direct par l'utilisation d'objets tangibles (**H2**). Enfin, il est malheureusement probable que l'utilisation d'objets tangibles soit la métaphore la plus fatigante (**H3**).

Matériel et logiciel

La tablette utilisée est une **TOSHIBA 7" AT270**, fonctionnant sous **ANDROID 4.0.3**. L'objet tangible de référence est présenté section 4.4.2.1. Le rendu (moteur développé en interne sous **OPENGL ES**) est similaire à la section 4.4.2.3, néanmoins les données sont ici un tétraèdre, orienté dans l'espace par ces sommets, colorés. La souris 3D est une **SPACENAVIGATOR** (voir figure 4.21).



Figure 4.21 – La souris 3D utilisée.

Participants

Douze participants (deux féminins, dix masculins), tous droitiers, ont passé l'expérience, provenant du Laboratoire pour l'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur (Université de Paris-Sud), âgés entre 20 et 35 ans. L'âge moyen était de 24 années (déviation standard $\sigma = 2$ ans). Parmi ces participants, dix utilisent régulièrement un smartphone, et 5 utilisent également régulièrement une tablette tactile. Cinq participants utilisent également régulièrement des logiciels 3D. Seulement un participant a une vraie expérience de la réalité augmentée. Deux participants avaient une expérience limitée de l'utilisation d'une souris 3D.

Procédures

Les participants étaient assis sur une chaise de bureau et devaient tenir la tablette de leur main dominante. Il était demandé aux sujets de rester assis, mais ils pouvaient bouger la tablette comme ils le souhaitaient. Sur la table était disposé un marqueur de référence, pour le positionnement de la cible à atteindre. Sur la table était également disposé la souris 3D et l'objet tangible de référence. Aucune rémunération n'a été offerte.

Avant l'expérience, nous avons présenté brièvement les trois métaphores. L'expérience commence par un court entraînement pour chaque condition. Le scénario est répété huit fois pour chaque condition, et l'expérience se termine avec un court questionnaire.

Tâche

La tâche de positionnement est fortement inspirée des travaux de Zhai et Milgram [180] et de Hancock *et al.* [74]. Les sujets doivent manipuler un tétraèdre sur un tétraèdre cible (voir figure 4.22). Les sommets, colorés, servent à l'orienter dans l'espace. Les deux tétraèdres sont des objets en réalité augmentée. Le tétraèdre cible est immobile. Lorsque les deux objets coïncident (la tolérance en espace étant indiqué par un léger halo) pendant une seconde, la tâche est validée.



Figure 4.22 – Vue typique de l'expérience. Le tétraèdre manipulé est d'une couleur légèrement différente, pour faciliter la distinction. Le halo de tolérance sur les sommets est visible sur le tétraèdre de droite. Le marqueur lié au tétraèdre cible est visible en bas de l'image sur la tablette.

Mesures

La principale mesure objective est le temps mis par chaque participant pour terminer

la tâche (mesure **MO1**). Les autres mesures objectives concernent l'enregistrement des mouvements 3D (translations **MO2** et rotations **MO3**) du tétraèdre contrôlé.

Après l'expérience, un questionnaire était soumis aux sujets.

4.4.2.4.2 Résultats

Un test de Shapiro-Wilk assurent que les données ne suivent pas des distributions normales. Dans la suite, les comparaisons sont faites par des ANOVA de Friedman lorsque l'on considère les trois conditions, et des tests de rangs signés de Wilcoxon lors des comparaisons deux à deux.

L'ANOVA a montré que les différentes conditions ont une influence hautement significative sur le temps de complétion **MO1** ($\chi^2 = 45.19$, $p < 0.01$) présenté figure 4.23.

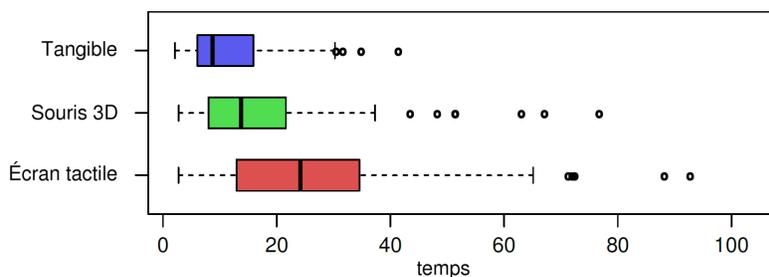


Figure 4.23 – Temps de complétion en fonction de la condition.

Comme attendu au vu des travaux de Ware & Rose [177], les participants sont hautement significativement plus rapide avec la condition **C1** (temps moyen $t = 8.72s$, avec une déviation standard $\sigma = 8.47s$) qu'avec les autres conditions **C2** (temps moyen $t = 13.72s$, avec une déviation standard $\sigma = 29.66s$, p-value $p < 0.01$) et **C3** (temps moyen $t = 24.17s$, avec une déviation standard $\sigma = 27.54s$, p-value $p \ll 0.01$). Le fait que la condition **C2**, comme la condition **C1**, soit isotonique et néanmoins moins performante que la condition **C3**, isométrique, indique que ce biais n'a pas eu une influence trop importante dans l'étude. Comme l'indique Zhai [180], cette condition est très dépendante de la tâche. L'hypothèse principale **H1** est donc validée.

La plupart des participants ont noté que l'utilisation de l'objet tangible de référence permettait d'accomplir plus rapidement la tâche que la souris 3D. L'écran tactile a été systématiquement noté comme la méthode la plus lente. Le test de Kendall de concordance vérifie la haute significativité de ces résultats ($W = 0.715$, $\chi^2 = 17.2$, et $p < 0.01$). Le rôle colocalisation est mis, comme dans les travaux de Ware & Rose [177], en avant ici.

L'objet tangible de référence est également relevé par les utilisateurs comme (légèrement) plus précis que la souris, et bien plus que la modalité tactile. Le test de Kendall montre que ce résultat est significatif ($W = 0.271$, $\chi^2 = 6.5$, et $p < 0.05$).

La souris 3D a néanmoins été perçue comme une métaphore moins fatigante que l'utilisation de l'objet tangible de référence, la métaphore tactile étant une nouvelle fois classée dernière. La concordance des participants était néanmoins plus faible ($W = 0.250$, $\chi^2 = 6.0$, et $p \approx 0.05$). Ces résultats tendent à confirmer l'hypothèse **H3**. Que la métaphore associée à l'écran tactile soit plus mal classée que la métaphore d'interaction par objets tangibles s'explique sans doute par les temps de complétion plus importants.

4.4.2.5 Évaluation de l'utilisation de tangibles pour réaliser des plans de coupe

Cette seconde expérience se place dans la continuité de la précédente. L'utilisation d'objets tangibles peut se généraliser à d'autres tâches complexes. Le système, par écran tactile, présenté section 4.3, a montré à quel point le positionnement d'un plan de coupe dans des données 3D, nécessitant de manipuler un grand nombre de degrés de liberté, est une tâche complexe. Afin de palier à ce problème, on propose d'utiliser un stylet afin de réaliser des plans de coupe dans des données scientifiques.

Afin d'évaluer l'efficacité du stylet dans cette tâche, nous avons implémenté, sur tablette tactile, une manipulation de plan de coupe strictement similaire à celle de **PARAVIEW**⁴, utilisée dans le cadre de la mécanique des fluides. D'autres logiciels, typiquement dans le logiciel de calcul scientifique **MATLAB**, utilisent la ligne de commande pour placer les plans de coupe. Une telle approche n'a pas été considérée ici (comme pour la figure 3.39 de la section 3.6.4).

D'autre part, la tablette forme elle-même un objet affordant pour réaliser des plans de coupe. La suite de cette étude compare les trois méthodes présentées.

4.4.2.5.1 Protocole et conditions de l'expérience

Participants

Neuf participants (un féminin, huit masculins), tous droitiers, ont passé l'expérience, provenant du Laboratoire pour l'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur (Université de Paris-Sud), âgés entre 23 et 29 ans. L'âge moyen était de 24 années (déviation standard $\sigma = 2$ ans). Un des participants était gaucher.

Procédures

Les participants étaient assis sur une chaise de bureau et devaient tenir la tablette, sans instruction particulière. Sur la table était disposés la tablette, le tangible de référence, le stylet tangible et une souris sans fil ambidextre. Pour éviter toute collision avec la table, le tangible de référence était légèrement surelevé car posé sur une piédestal en carton. Les participants étaient autorisés et encouragés à déplacer le tangible de référence comme ils le souhaitaient.

La tâche est conçue pour être réaliste, bien que pensée pour être faite par des sujets non-experts : trouver des cibles dans des données pseudo-scientifiques. Présenter des données issues de mécanique des fluides a été jugé être trop complexe pour des sujets non-experts. Afin de néanmoins proposer un environnement crédible et scientifique, un crâne humain (voir image 4.24), issu de données IRM 3D, était représenté. Trois boules, visibles sur la figure 4.25, suffisamment contrastées pour ne pas être confondu avec le reste du crâne, étaient placées dans ces données, symbolisant des points d'intérêt dans les données. Afin de ne pas être visualisé par le rendu volumique, les sphères n'étaient visibles qu'au travers du plan de coupe. En explorant le domaine par un plan de coupe, les participants devaient trouver les trois sphères, et les aligner dans le plan. Les sphères devaient rester dans le plan pendant 0.8 s pour que la tâche soit considérée comme (automatiquement) validée. La limite de temps, pour chaque essai, était fixé à 300 s.

4. <http://www.paraview.org/>

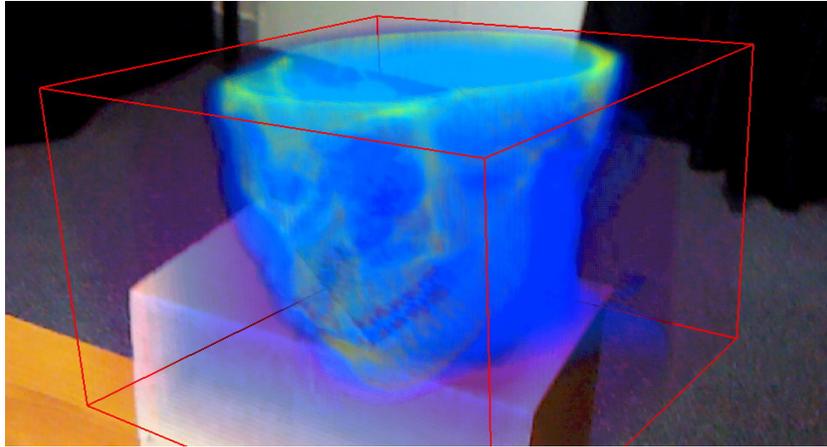


Figure 4.24 – Superposition des données, issues de l'IRM d'un crâne, et de l'objet tangible de référence.

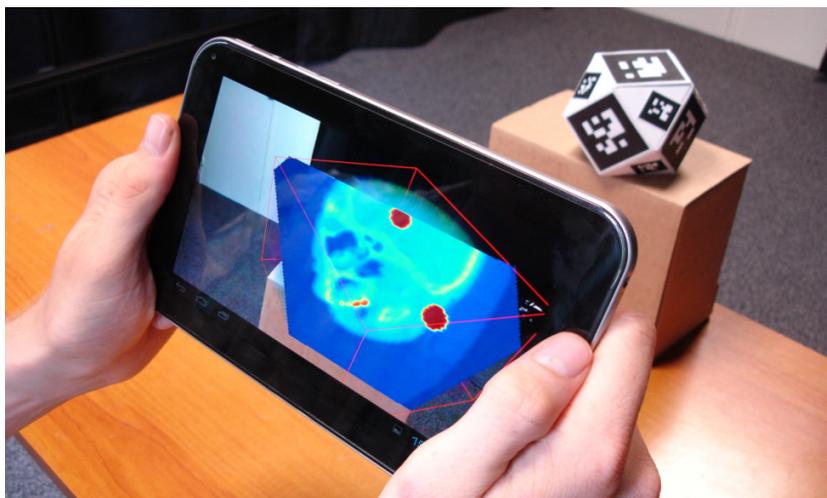


Figure 4.25 – Illustration du plan de coupe, et des cibles à identifier dans les données.

Conditions

Les trois conditions principales étaient, l'utilisation de la tablette comme d'un plan de coupe **C1**, l'utilisation du stylet pour couper les données **C2** et la condition témoin, l'utilisation d'une souris **C3**. Afin de moduler la difficulté de la tâche, deux types de jeu de sphères étaient présentés aux sujets, des petites sphères de diamètre $\varnothing = 0.7$ cm (condition "difficile") et des sphères plus grandes, de diamètre $\varnothing = 1.1$ cm (condition "facile"). Pour chaque difficulté, les participants se voyaient proposé trois essais par conditions. Deux essais supplémentaires, d'entraînements, étaient de surcroit proposé pour chaque condition. Les participants pouvaient faire une pause, si désirée, entre chaque condition.

Hypothèses

L'hypothèse **H1** principale de cette étude est que les participants complètent plus rapidement la tâche, *i.e.* trouvent plus rapidement le plan de coupe cible en utilisant le stylet tangible (la condition **C1**). L'hypothèse secondaire **H2** est que les sujets préfèrent utiliser le stylet.

Mesures

Si la mesure objective principale est **MO1** le temps de complétion de la tâche, d'autres informations sont également enregistrés, en particulier, la trajectoire du plan de coupe **MO2**.

Après l'expérience, un questionnaire, sur une échelle de Likert de 6 points a été soumis aux participants, afin d'évaluer leurs perceptions sur les critères de **MS1** fatigue, **MS2** précision, **MS3** prédictibilité de la métaphore utilisée, **MS4** rapidité d'exécution de la tâche, et **MS5** préférence globale.

Il était également demandé aux participants de lister, de façon libre, les points positifs et négatifs ressentis, pour chaque condition.

4.4.2.5.2 Résultats

Le temps de complétion **MO1**, comme souvent, n'est pas normalement réparti (Shapiro-Wilk $W = 0.79$, p-value $p < 0.01$), mais suivant une distribution lognormal (Kolmogorov-Smirnov $D = 0.05$, p-value $p = 0.76$). Une transformation a donc été appliquée aux données de temps pour faire les tests statistiques.

Une analyse de la variance à deux facteurs montre que les conditions ont une influence significative sur les résultats de **MO1** (p-value $p < 0.05$). Comme attendu, la difficulté a également eu une importance significative sur le temps de complétion (p-value $p < 0.05$). Les temps de complétion peuvent être trouvés figure 4.26. Les temps de complétion moyen, pour la condition **C1** est de 56 s, et, pour la souris **C3** de 79 s. Étonnamment, la mesure **MO1** concernant la tablette est supérieur à la souris, avec un temps moyen de 85 s. Ces résultats sont en accord avec les travaux de Bonnani *et al.* [13] concernant les objets tangibles spécialisés. Les différences entre la tablette (condition **C3**) et le stylet (condition **C2**) sont hautement significatives (p-value $p < 0.01$), et significatives lorsque l'on compare le stylet à la souris (p-value $p < 0.05$). Il n'y a pas, néanmoins, de différences significatives entre la tablette **C1** et la souris **C3**. L'hypothèse **H1** est donc vérifiée.

Les mesures subjectives sont synthétisées dans la figure 4.27. Comme attendu, le stylet a été préféré par les participants. De manière surprenante, la tablette est classée dernière, sauf pour la question de la fatigue. La raison est, comme dans l'expérience

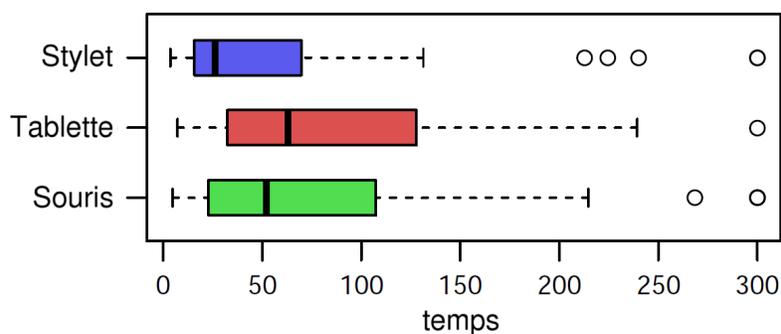


Figure 4.26 – Boîtes de Tukey concernant les temps de complétion en fonction des conditions.

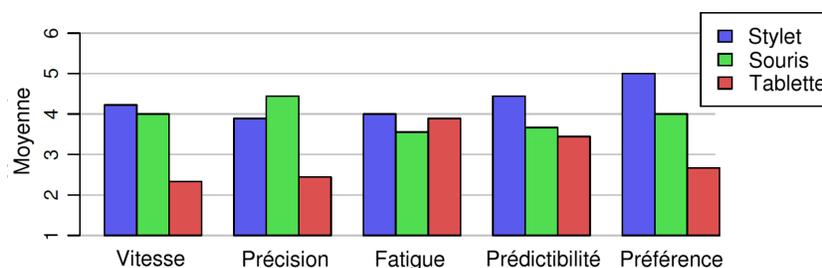


Figure 4.27 – Préférences des utilisateurs en fonction des conditions.

précédente, la tablette devait être tenu dans toutes les conditions. On peut noter le compromis à faire, entre la métaphore **C2** et **C3**, concernant la vitesse de réalisation et la précision. A l'exception de la préférence globale, il n'y a pas de différences notables entre la condition stylet **C2** et la souris **C3**, ce qui permet néanmoins de valider l'hypothèse **H2**.

Conclusions sur les métaphores proposées d'exploration de données

Dans ce chapitre a été présentées plusieurs méthodes visant à l'exploration de données scientifiques. Si les interfaces tactiles font l'objet d'un intérêt important dans la communauté, l'interface et l'étude proposées dans la section 4.3 ont permis de montrer l'importance cruciale, dans le cadre de l'exploration de données scientifiques, du couplage entre une exploration en 2D et en 3D.

Un point relevé dans cette étude est la pertinence, pour une bonne compréhension de la structuration spatiales des données, de la manipulation directe des données. Ces deux points nous ont amené à proposer des méthodes d'exploration par réalité mixte (virtuelle et/ou augmentée), en utilisant des objets tangibles. Le premier d'entre eux est une tablette, agissant comme une fenêtre vers l'univers virtuel, ou en permettant d'ancrer dans la réalité les données à explorer. Ces interfaces sont significativement meilleure pour l'exploration, et permettent *de facto* la manipulation directe des données et de l'univers dans lesquelles elles sont plongées. L'utilisation d'un objet tangible de référence, ancrant

les données, est apparu comme un moyen efficace de manipulation de données. De plus, pour certaines tâches complexes, tel que le positionnement de plans de coupe, l'utilisation d'objets tangibles spécifiquement conçus, mais abordables, s'avère particulièrement efficace.

Chapitre 5

Discrimination psychophysique de valeurs proches

L'exploration de données complexes, et leur interprétation, posent la question de l'interprétation, par l'utilisateur-expert, de ses retours sensoriels. Par exemple, la carte de couleurs "Jet color" ou arc-en-ciel, particulièrement utilisée en mécanique des fluides, présente des problèmes connus d'indiscernabilité [147] et de risques de confusion [112, 14] sur la détermination de propriétés (par exemple l'identification de structures) des données analysées. Par exemple, sur la figure 3.48 de la section 3.7.1, les nuances entre les couleurs orange-clair et vert claire sont faibles. Dans ce cas précis, il est délicat de prédire si une particule, au temps T , finira dans une zone tel que $x/L \approx 0.4$ ou $x/L \approx 0.6$. La question de la discrimination, de la différentiation entre deux propriétés voisines par un expert est donc au cœur d'une "bonne" compréhension des figures. Cette question plus généralement, est dans l'étude et la détermination du seuil différentiel de perception, c'est-à-dire la différence minimale, entre deux signaux, pour que l'utilisateur les différencie à coup sur. Le seuil différentiel de perception est bien défini et étudié dans le cas unidimensionnel. Néanmoins, le cas de seuil de différentiation pour des signaux multidimensionnels, *i.e.* dépendant de plusieurs paramètres, est totalement inexploré. Ce chapitre présente une méthode efficace, visant à combler ce vide. Cette étude expérimentale, identifiant le seuil psychophysique d'utilisateurs quant à un signal haptique dépendant de deux paramètres, valide la méthode proposée.

5.1 État de l'art pour la différentiation de valeurs proches

Le terme psychophysique fut inventé par Gustav Theodor Fechner, aux alentours de 1850. Dans les années 1860, suite aux travaux d'Ernst Heinrich Weber, Fechner a formalisé la loi de Weber-Fechner, décrivant la relation entre l'intensité du signal soumis à un sujet et la sensation perçue. Les travaux fondateurs de Fechner ont également mené à l'élaboration de méthodes de mesures, dites "classiques", visant à évaluer la plus petite différence d'intensité perceptible, *i.e.* la différence minimale qui change l'expérience pour l'utilisateur. Aujourd'hui, le seuil perceptif est en pratique associé à un certain pourcentage exprimant la probabilité que le sujet ressente la différence, afin d'être plus représentatif quand aux incertitudes des jugements des sujets.

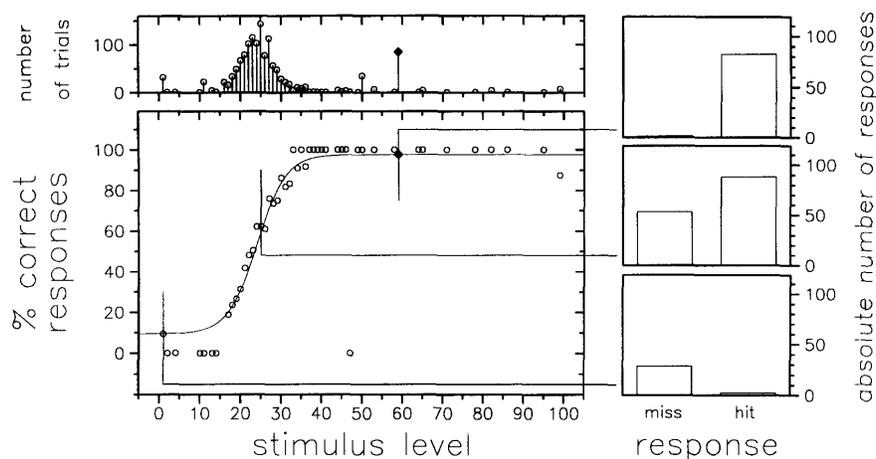


Figure 5.1 – Figure extraite de Treutwein [174]. Illustration d'une courbe psychométrique et de la distribution sigmoïde. Sur la partie gauche de la figure, la figure du haut est un histogramme du nombre d'essai en fonction de l'intensité (ici le paramètre étudié) du signal présenté. Dessous sont présentées les pourcentages de réponses correctes des participants, ainsi qu'une sigmoïde obtenue par régression sur les données. Les trois figures de droites illustrent ces pourcentages pour trois stimuli choisis de part et d'autre de la courbe.

Le pourcentage de réponses correctes du sujet est lié aux paramètres du stimulus, par la fonction psychométrique, noté f . Dans la littérature, cette fonction n'est considérée que pour des stimuli ne dépendant que d'un paramètre que l'on note ζ , en particulier son intensité. Les bonnes réponses cumulées (ou le pourcentage de bonnes réponses) évoluent continuellement en fonction du stimulus. La probabilité de correctement percevoir un stimulus (*e.g.* différencier deux couleurs d'une carte de couleurs définissant les valeurs d'un champ d'exposants de Lyapunov à temps fini, comme sur la figure 4.7) augmente avec son intensité, la fonction prend la forme d'une sigmoïde (voir la figure 5.1). Ce profil est universel, retrouvé par exemple de l'humain à la mouche [104].

5.1.1 Les méthodes classiques d'identification de seuil perceptif

L'ensemble des méthodes classiques, initialement proposées par Fechner, regroupent trois démarches distinctes.

- La méthode par stimulus constant consiste à soumettre au sujet nombres de stimuli, pour différentes amplitudes $\zeta = n\delta\zeta$. Le tracé de la réponse cumulée, illustré figure 5.1 permet d'estimer la fonction psychométrique. Le seuil de discrimination est alors choisi, selon les besoins, à un certain pourcentage de détection ou au point d'inflexion de la fonction.
- Dans la méthode des limites, l'expérimentateur fait varier linéairement, par de petits incréments $\delta\zeta$, le paramètre contrôlant le stimulus. Le sujet précise, pour chaque test, le type de stimulus qu'il pense avoir ressenti. Le seuil est estimé dès que le sujet perçoit un changement. La répétition de cette expérience est nécessaire pour une évaluation pertinente. Cette méthode ne permet pas l'estimation d'un

- point précis sur la fonction psychométrique.
- La méthode des ajustements repose totalement sur le sujet, qui contrôle les paramètres des stimuli et choisit, en répétant la procédure un certain nombre de fois, le signal minimum changeant sa perception. Une nouvelle fois, le point correspondant sur la fonction psychométrique n'est pas défini par l'expérimentateur.

5.1.2 Les méthodes adaptatives d'identification de seuil perceptif

Les méthodes classiques ne tiennent pas compte des réponses précédemment données par le sujet [43]. La fonction psychométrique étant une loi probabiliste, une approche stochastique est apparue pertinente. Les travaux précurseurs mathématiques de Robins & Monro [142] ont permis l'émergence d'une autre classe de méthodes durant les années soixante, *e.g.* la méthode PEST proposée par Taylor & Creelman [172] : Les méthodes adaptatives. Les réponses passées du sujet permettent *d'adapter* le nouveau stimulus présenté. Ces méthodes peuvent également être classées suivant deux catégories, suivant les objectifs de l'expérimentateur :

- L'expérimentateur veut retrouver les paramètres de la fonction psychométrique (*i.e.* le seuil \mathbf{p} à 50% et la sensibilité au seuil, *i.e.* la dérivée de la fonction psychométrique $\frac{df}{d\zeta}$ au point $\check{\zeta}$ tel que $f(\check{\zeta}) = \mathbf{p}$).
- L'expérimentateur veut trouver un point précis de la fonction psychométrique, correspondant à une performance désirée (*e.g.* le seuil \mathbf{p} à 65%).

Le sujet se voit proposer plusieurs fois un même stimulus. Suivant ses réponses, l'intensité du prochain stimulus sera plus ou moins importante. L'amplitude de l'évolution dépend de l'histoire de l'expérience.

Présentons l'algorithme PEST (pour estimation du paramètre par des séquences de tests), tel qu'il a été défini par Taylor & Creelman [172]. Un niveau de performance est recherché (*e.g.* $\mathbf{p} = 75\%$ d'identifications correctes). Un incrément $\delta\zeta$ et un niveau initial ζ_0 sont initialisés. Le stimuli correspondant est présenté plusieurs fois. Un test statistique (originellement un test de Wald, mais ce test peut être adapté suivant les cas), à chaque réalisation, est calculé jusqu'à convergence, afin de prédire si la performance du niveau considéré est plus ou moins élevée que la performance cible. En conséquence, le prochain niveau de test est décidé, d'un incrément supérieur ou inférieur suivant le résultat du test. La procédure est ensuite réappliquée. Si la prochaine direction est la même que précédemment, le pas n'est pas changé. Dans le cas contraire, il est réduit de moitié (voir, *e.g.*, la figure 5.1.2).

La méthode du "Maximum-Likelihood" [67] est dérivée de l'algorithme PEST. Le test statistique utilise tous les essais précédents pour approximer la fonction psychométrique et s'approcher à chaque pas du niveau de performance espéré. Connaître la forme de la fonction psychométrique est par contre un prérequis.

D'autres méthodes ne demandant pas d'estimations statistiques existent, telle que la méthode des escaliers [111, 107]. Cette méthode est simple. Deux paramètres u et d permettent de choisir le seuil à atteindre de la fonction psychométrique (*e.g.* $u = 1$ et $d = 1$ pour un seuil à $\mathbf{p} = 50\%$). Dès que le sujet ressent u fois de suite positivement le signal, le stimulus présenté ensuite sera baissé d'un incrément. Au contraire, si le sujet ne ressent pas d fois de suite le signal, le stimulus présenté sera immédiatement augmenté

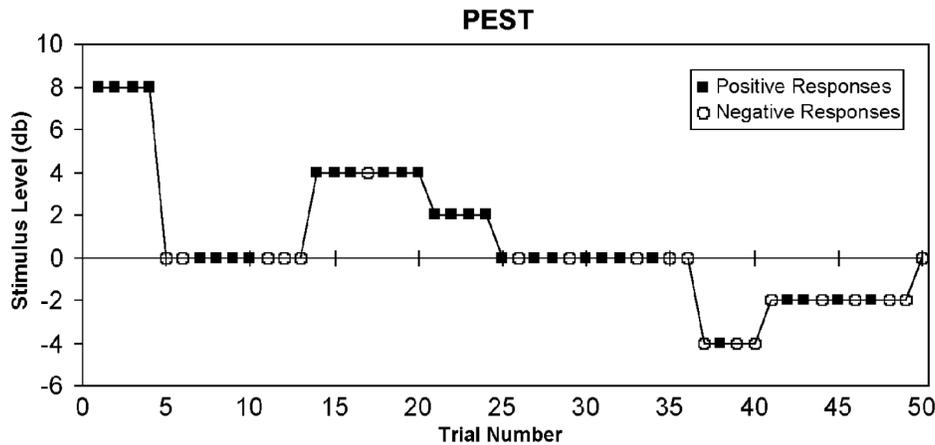


Figure 5.2 – Figure extraite de Leek [107]. Illustration d’un test PEST, permettant l’identification d’un seuil psychophysique (ramené à 0).

d’un incrément. Des règles peuvent être ajoutées pour faire varier l’incrément au fil des tests [90].

5.1.3 Mesure de l’efficacité d’une méthode d’identification de seuil

Afin d’évaluer l’efficacité des méthodes, Taylor & Creelman [172] et Taylor [171] ont proposé une mesure G d’efficacité dans l’identification d’une seuil perceptif \mathbf{p} (e.g. $\mathbf{p} = 50\%$) :

$$G = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{T}}, \quad (5.1)$$

où \mathcal{E} est le facteur d’effort nécessaire à la méthode :

$$\mathcal{E} = n\sigma_r^2 = n \frac{\sum_r (\hat{\zeta} - \bar{\zeta})^2}{r} \quad (5.2)$$

n étant le nombre total de stimuli présenté, r le nombre d’estimation du seuil, $\hat{\zeta}$ le seuil identifié à l’essai r et σ_s^2 est la variance de la détection du seuil r . Finalement, $\bar{\zeta}$ est la moyenne des seuils s . \mathcal{T} est un facteur idéal dérivée de la formule binomiale :

$$\mathcal{T} = n\sigma_{bin}^2 = \frac{\mathbf{p}(1-\mathbf{p})}{\left(\frac{df(\check{\zeta})}{d\check{\zeta}}\right)^2} \quad (5.3)$$

où $\check{\zeta}$ est la valeur théorique du paramètre pour la performance psychométrique recherchée ($\mathbf{p} = \mathbf{f}(\check{\zeta})$).

5.2 Seuil différentiel multi-dimensionnel

Comme cela a été précédemment montré, la différentiation entre deux signaux est particulièrement importante. On peut améliorer cette discrimination en modifiant les

paramètres dont dépend le signal sensoriel. Une discrimination efficace à près de 100% peut être réalisée, si l'expérimentateur connaît les seuils perceptifs des sujets. L'étude de seuil perceptif est couramment pratiquée en une seule dimension. Par exemple, Mountcastle *et al.* [128] ont étudié le pas de fréquence minimal pour faire la distinction entre deux sons tirés d'une flûte. Dans cette étude, seulement la fréquence est prise en paramètre. Être capable de discriminer des couleurs et des intensités lumineuses (comme dans la carte de flot de la figure 3.48), la profondeur des données (*e.g.* la structuration 3D des tourbillons de la figure 3.38) est fondamentale pour une exploration efficace de données scientifiques. Pour l'étude de signaux dépendant de plusieurs paramètres (comme, en reprenant l'exemple précédant de la flûte, la fréquence *et* l'intensité du son), la question reste ouverte. Ces questions ne se sont pas posées, pour une raison technique. Explorer les sensibilités de sujets prend du temps, et ce temps augmente en général exponentiellement avec le nombre de paramètres explorés. Pour cette raison, nous avons développé une technique variant logarithmiquement avec le nombre d'essai. La méthode a été numériquement testée, sur des sujets *virtuels*, avant d'être utilisés pour déterminer le seuil différentiel, variant selon deux dimensions, de l'expérience précédente.

5.2.1 Détermination efficace de seuils multi-dimensionnels

Supposons que l'on construise un stimulus $f_{\zeta}(t)$ dépendant des $n_{\mathcal{D}}$ paramètres $\zeta \in \mathcal{D}$, où \mathcal{D} est *a priori* un compact de $\mathcal{R}^{n_{\mathcal{D}}}$.

Suivant les paramètres ζ , l'utilisateur renvoie une réponse \mathbf{X} positive – lorsqu'il détecte la différence entre le stimulus et un état de référence – ou, dans le cas contraire, négative.

Le seuil perceptif est donc l'hypersurface \mathcal{H} de \mathcal{D} tel que la réponse \mathbf{X} change de signe de part et d'autre.

Cette surface étant issue de perception, on peut supposer sans risque que \mathcal{H} est, *a minima*, \mathcal{C}^0 . L'hypersurface \mathcal{H} est donc, quitte à restreindre \mathcal{D} , convexe. Cela implique, en particulier, que toute droite orientée par un paramètre ne coupe \mathcal{H} au plus en un seul point. Le cœur de la méthode proposée par la suite dépend de cette propriété. Le problème peut se ramener, lors de l'exploration d'une droite de l'espace des paramètres, à chercher le zéro d'une fonction inconnue, mais monotone. Une méthode classique et efficace pour identifier un tel point est la méthode de dichotomie. On propose donc, afin d'approximer \mathcal{H} , d'utiliser une dichotomie selon les paramètres ζ et de tester les réponses des utilisateurs. Le principal avantage, par rapport aux méthodes de détection de seuils perceptif présentées section 5.1 est ici la rapidité de convergence, logarithmique plutôt que (au mieux) linéaire, indispensable lorsque l'on explore des espaces de dimensions deux ou plus.

Un problème supplémentaire se pose lorsque l'on cherche à identifier des seuils perceptifs. Les sujets peuvent parfois se tromper [174]. Lorsque cela arrive, la dichotomie ne peut converger, et on trouve un point qui n'appartient pas à l'hypersurface \mathcal{H} . On fait alors une seconde hypothèse. Le seuil perceptif multidimensionnel \mathcal{H} est décrit par une relation entre les paramètres ζ , sous une forme que l'on peut intuitivement (par exemple une forme polynomiale). Par conséquent, une régression sur les points, même en cas de mauvaise convergence, permet d'identifier avec une précision suffisante la relation pour approximer de manière convenable \mathcal{H} .

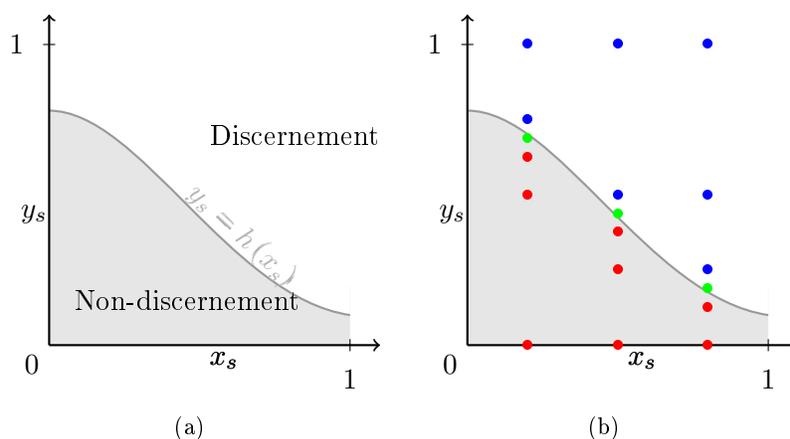


Figure 5.3 – (a) : Illustration de la courbe de seuil perceptif dans un cas à deux dimensions. (b) : Dichotomie selon le paramètre y_s . Les points verts sont les points finaux après 5 itérations. Les points rouges correspondent à une réponse négative, et les points bleus à une réponse positive.

Dans la suite, on se limitera à $n_{\mathcal{D}} = 2$, mais l’algorithme présenté par la suite est trivialement extensible à des dimensions plus élevées.

5.2.1.1 Algorithme principal

Dans le cas bidimensionnel, la courbe de seuil, illustrée figure 5.3(a) peut se ramener à :

$$y_s = h(x_s), \quad (5.4)$$

où $\zeta = (x_s, y_s)$. La première étape de l’algorithme est de calculer, selon une direction, un certain nombre n_d de points $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)_{i \in \{1, \dots, n_d\}}$ proches de la courbe seuil, par dichotomie (voir figure 5.3(b)). En pratique, h dépend d’un certain nombre de paramètres a_i , qui peuvent dépendre, ou non, des sujets. Ces coefficients, et donc h , sont ensuite identifiés par régression. Le choix de l’ajustement est fait, si la théorie le permet, sur un modèle prédéfini. En acoustique, par exemple, le modèle PIN permet d’estimer le seuil perceptif concernant la détection d’une note par une loi de puissance de l’intensité du signal (voir par exemple Allen et Sent [2] pour une revue des modèles acoustiques sur ce sujet). Sans modèle, la régression peut se faire par intuition sur une famille de fonctions. Si, par exemple, h est une fonction polynomiale de degré 2, alors les a_i sont les coefficients polynomiaux, et :

$$h(x_s) = a_2 x_s^2 + a_1 x_s + a_0 \quad (5.5)$$

La régression est une étape importante de l’algorithme. La dichotomie présentée jusqu’ici ne tient pas compte que, dans une expérience sensitive, le sujet peut potentiellement donner une mauvaise réponse. C’est précisément la raison d’être des méthodes de type adaptative, qui valident à plusieurs reprises les réponses des participants afin

de ne pas tenir compte des faux-positifs. Dans l'algorithme présenté jusqu'ici, aucune vérification n'est effectuée. La dichotomie peut donc, dans un certain nombre de cas, converger vers un point qui n'est *pas* sur la courbe seuil. Il est à noter qu'une analyse en post-traitement est toujours possible. Dans le cas d'une mauvaise réponse, toutes les réponses suivantes seront de signes identiques, comme sur la figure 5.4. La convergence s'effectue sur un point qui n'est pas *trop* éloigné de la courbe seuil. Lorsqu'un point est douteux, il est possible de remettre en cause la convergence et de détecter une potentielle mauvaise réponse, en considérant l'itération où la courbe de convergence devient monotone (décroissante dans le cas de la figure 5.4).

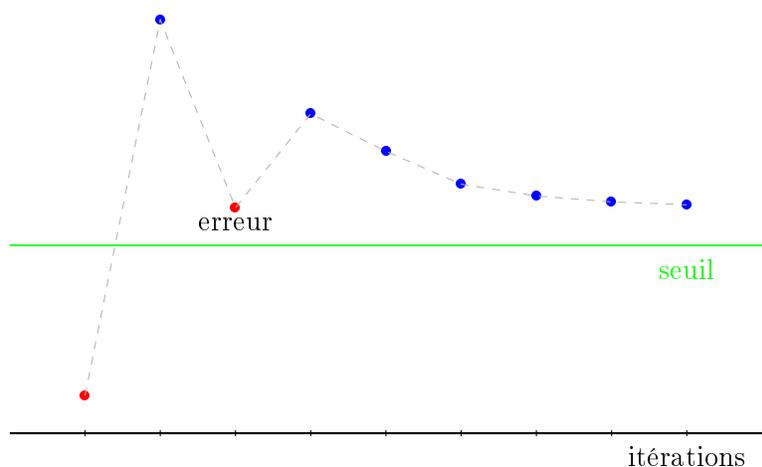


Figure 5.4 – Comportement typique de la convergence en cas de mauvaise réponse.

La régression permet néanmoins de ne pas s'attarder sur les mauvaises erreurs potentielles. L'ajustement de la courbe par régression permet de s'affranchir, dès lors que le nombre de points n_d est supérieur aux nombres de coefficients à identifier dans l'équation (5.5), dans une certaine mesure de la nocivité des points suspects.

5.2.1.2 Prédiction-Correction des réponses

Néanmoins, les coefficients, étant dérivés de sensibilités psychosensorielles et de fonctions psychométriques, sont *a priori* distribués selon des lois normales. Dès lors que ces lois sont connues (par exemple par une expérience précédente), on peut prédire la réponse d'un sujet. Si la réponse est statistiquement improbable, la réponse du sujet est douteuse. Cette réponse est statistiquement improbable si elle sort des écart-types des paramètres estimés pour une population. Alors, de manière similaire à une méthode adaptative, le sujet se voit proposer une nouvelle fois le stimulus, afin de valider, ou de revenir sur sa précédente réponse. Cette étape peut être considérée comme une évolution des incréments dans l'algorithme adaptatif RAT [174].

5.2.2 Validation numérique

Valider une méthode, en psychophysique, passe par une expérience sur de nombreux sujets. Il est parfois délicat de rassembler un grand nombre de personnes pour passer une expérience, et les détectations de seuils psychophysiques, malgré l'avancée de la méthode proposée, restent des expériences longues et fastidieuses pour les sujets. Ces contraintes m'ont poussé à proposer une approche de validation numérique [90]. En utilisant des sujets virtuels, les problèmes précités n'en sont plus.

5.2.2.1 Méthode numérique

Le système est adimensionné, les paramètres (x_s, y_s) évoluent donc entre 0 et 1. Dans le cadre de l'expérience numérique, l'allure de la courbe de seuil pour les participants, est proposée sous la forme :

$$y_s = h(x_s) = a \times \exp(b \times x_s) \quad (5.6)$$

La courbe, pour chaque participant, dépend donc du couple de paramètres psychophysiques $\zeta = (a, b)$. Ces paramètres sont tirés aléatoirement, suivant une loi gaussienne afin d'émuler un cas réel, pour chaque participant. Les paramètres des lois sont tels que $\langle a \rangle = 0.7$ et $\langle b \rangle = -2$, et les écart-types sont $\sigma_a = 0.02$ et $\sigma_b = 0.2$.

Dans l'expérience numérique, les sujets virtuels répondent aux stimuli, et donc potentiellement, doivent pouvoir donner une mauvaise réponse, c'est-à-dire mal ressentir le signal. Pour cela, une fonction psychométrique de type sigmoïde [174, 107] est utilisé. Une hypothèse supplémentaire est que la fonction psychométrique est constante le long de la courbe de seuil. En pratique, cette hypothèse est valable tant que la plage de paramètres explorée n'est pas trop grande, mais peut être contestée dans le cas contraire. La sensibilité à 5% est définie comme le pourcentage de bonnes réponses à une distance au seuil de 5%. C'est un paramètre lié à la pente de la fonction psychométrique au niveau du seuil. De ce fait, la fonction psychométrique ne dépendant dans un cas normalisé que d'un seul paramètre, la sensibilité à 5% permet de définir totalement la sigmoïde.

5.2.2.2 Seuil différentiel

Dans cette première approche, sauf précision, un faible nombre $n_d = 10$ de valeurs sont testées selon x_s . Les conditions les plus proches d'une expérience réelle sont recherchées. Le nombre de participants (virtuels) est fixé à $n_p = 200$. Les résultats principaux sont présentés figures 5.9 et 5.7. Comme attendu, une bonne sensibilité implique *de facto* une bonne estimation des paramètres. Ces derniers restent estimés avec une précision inférieure à l'écart type des données, même pour de médiocres sensibilités. Une mauvaise sensibilité équivaut en pratique à une mauvaise définition de l'espace à explorer pour l'identification de la courbe de seuil perceptif. L'algorithme capte donc bien les caractéristiques principales des courbes étudiées.

La bonne identification de la courbe de seuil reste l'objectif de cette étude. La différence entre la courbe identifiée et la vraie courbe de seuil demeure donc l'information principale. La figure 5.5 montre que cette différence se cantonne sous les 5% dans les cas les plus défavorables de sensibilité, et plonge sous le pourcent pour une bonne sensibilité.

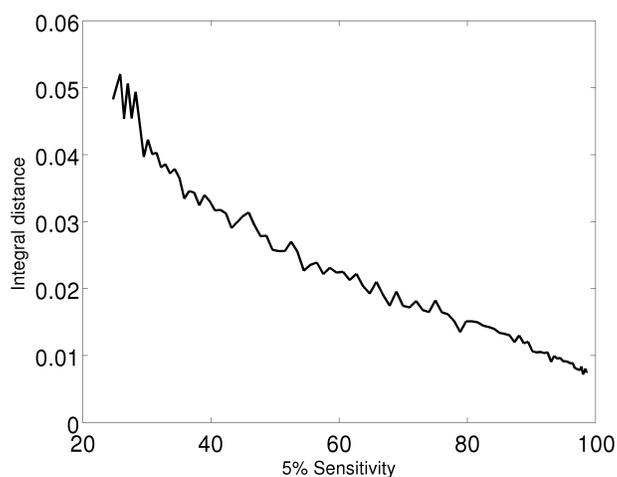


Figure 5.5 – Distance moyenne entre les courbes estimées par la méthode d'estimation de seuil perceptif multi-dimensionnel et la courbe de seuil réel, en fonction de la sensibilité à 5%.

La distance des points à la courbe peut être comprise comme l'erreur moyenne des points à la courbe théorique. Figure 5.6, cette distance reste contrôlée, et converge quasi-linéairement vers l'erreur minimal.

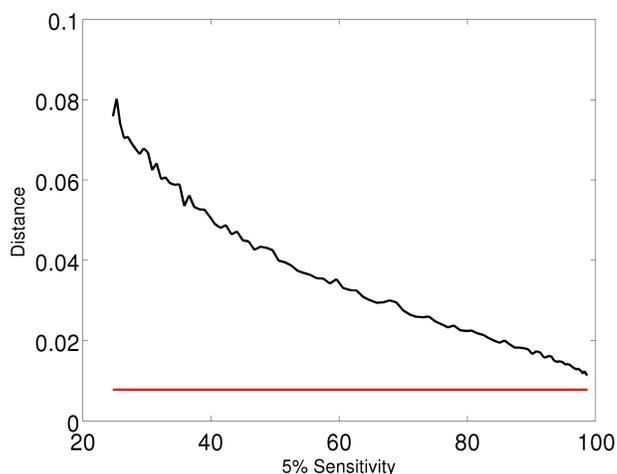


Figure 5.6 – En noir : distance moyenne des points identifiés à la courbe de seuil perceptif. En rouge : la distance maximale à la courbe théorique (cas idéal où les sujets ne se trompent jamais).

Des tests statistiques basés sur des analyses de variances dans notre cas, pour les paramètres, sont voués à l'échec. Les écart-types se doivent d'être différents, (*cf.* figure 5.7), par l'injection d'erreurs liées à la fonction psychométrique des participants. Néanmoins, la méthode permet une estimation robuste, au premier ordre, de l'écart-type des paramètres.

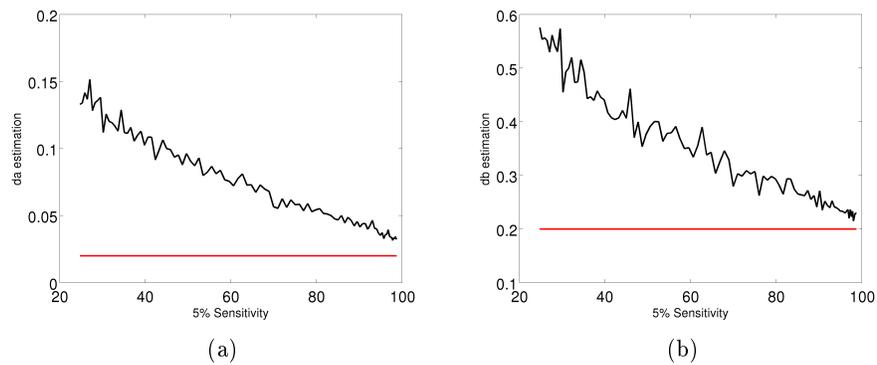


Figure 5.7 – Estimation de l'écart-type des paramètres $\zeta = (a, b)$ en fonction de la sensibilité à 5%. En rouge est indiqué le vrai écart-type. (a) : paramètre a . (b) : paramètre b .

Les tests pertinents se trouvent donc être des tests de corrélations entre les paramètres et les paramètres estimés. Les résultats, figure 5.8, montrent des corrélations particulièrement importantes, démontrant la correspondance entre les paramètres estimés et les vrais paramètres.

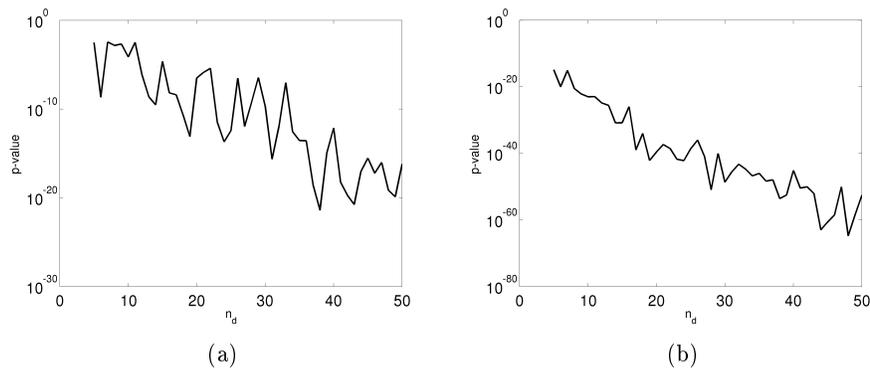


Figure 5.8 – Corrélation entre les paramètres $\zeta = (a, b)$ et les paramètres estimés $\zeta_{est} = (a_{est}, b_{est})$. (a) pour a . (b) pour b .

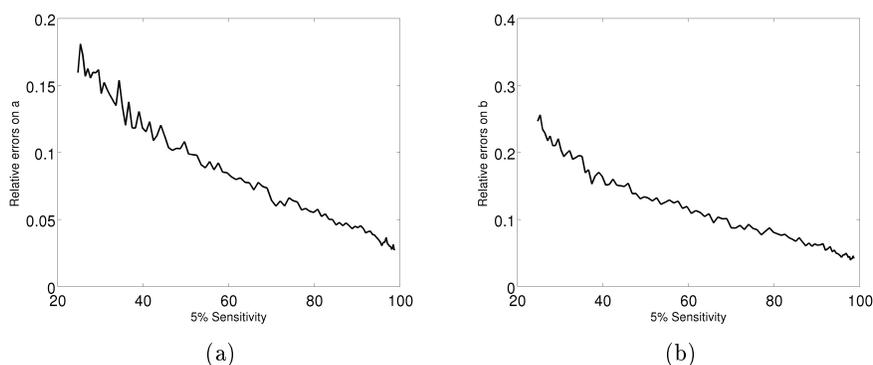


Figure 5.9 – Erreurs sur l’estimation des paramètres $\zeta = (a, b)$ en fonction de la sensibilité à 5%. (a) : paramètre a . (b) : paramètre b .

Le conditionnement de la régression augmentant avec le nombre de point n_d utilisé pour la dichotomie, la qualité de l’identification s’affine naturellement suivant n_d . Le nombre de participants influe peu sur cette propriété (*cf.* figure 5.10).

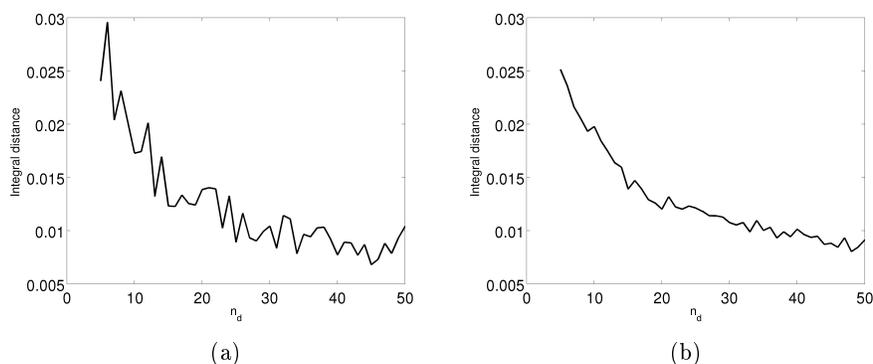


Figure 5.10 – Distance moyenne entre les courbes estimées par notre méthode et la courbe de seuil perceptif réel, en fonction du nombre de points n_d utilisés lors du processus. (a) : pour 20 participants virtuels, (b) : pour 200 participants virtuels.

L’efficacité de la méthode est présentée tableau 5.1, calculée à partir de l’équation (5.1). La dichotomie, ayant une convergence logarithmique, est, comme attendu, bien plus efficace que les méthodes adaptatives. Malgré un petit nombre d’essais au total (80 pour une seule répétition), l’efficacité de la méthode par dichotomie peut-être jusqu’à 18 fois plus importante que celle des méthodes adaptatives.

5.2.2.3 Prédiction-Correction

Dans cette partie, $n_p = 20$ sujets virtuels passent le test d’identification de seuil, et $n_d = 10$ valeurs sont testées selon x_s . Les valeurs estimées dans la première étape de l’algorithme permettent d’affiner les réponses pour les participants. Dans la suite, les déviations précédemment approximées (voir, *e.g.*, la figure 5.7) sont réutilisées lors de l’identification des paramètres. Si l’algorithme estime qu’un participant s’est trompé, *i.e.*

Tableau 5.1 – Comparaison de l’efficacité des méthodes, en fonction du nombre de passe par personne. Les conditions associées au test sont : 10 points selon x_s , 8 tests selon x_s -soit 80 essais au total-, 20 sujets virtuels.

| Méthode | QUEST | PEST | Dichotomie | | | | | |
|----------------------|-------|------|------------|------|-----|-----|-----|----|
| Efficacité (médiane) | / | / | 227% | 71% | 40% | 21% | 18% | 7% |
| Efficacité (moyenne) | 84% | 45% | 1856% | 138% | 75% | 25% | 20% | 9% |
| Répétition | / | / | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 |

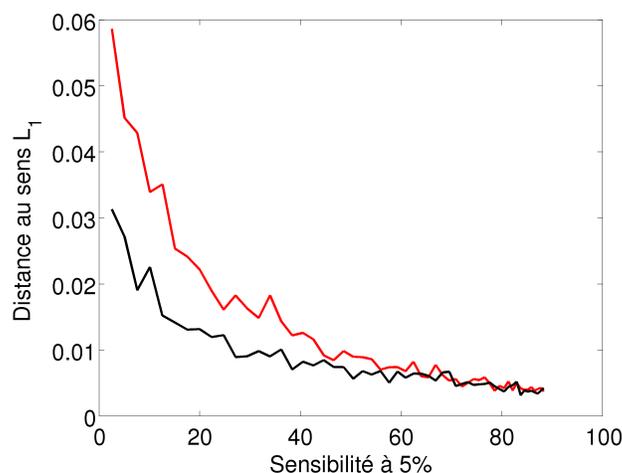


Figure 5.11 – Distance, au sens \mathcal{L}_∞ , entre les courbes estimées par la méthode d’estimation de seuil perceptif multi-dimensionnel, sans correction (rouge) et avec correction (en noir), en fonction de la sensibilité à 5%, pour 20 participants virtuels.

sa réponse est statistiquement peu probable, alors le stimulus est proposé une nouvelle fois. Son nouveau choix, quelqu’il soit, est validé.

Avec une bonne sensibilité, les sujets ne se trompent que peu. Peu d’erreurs impliquant peu de correction, la prédiction-correction se doit donc d’avoir une faible influence sur les résultats. Cette hypothèse est confirmée, par l’expérience. Sur la figure 5.11, la distance (au sens \mathcal{L}_∞ , le plus défavorable) entre la courbe estimée avec et sans correction est tracée. Si la prédiction-correction permet d’améliorer considérablement l’estimation de la courbe de seuil, pour des sensibilités médiocres, les améliorations ne sont plus discernables à mesure que la sensibilité augmente. Les figures 5.12 confirment que la prédiction-correction est moins importante dès lors que la sensibilité s’améliore. Il est frappant de remarquer, *e.g.* figure 5.13(b), qu’il n’y a quasi pas de différence entre la courbe corrigée et la courbe non-corrigée.

Malgré tout, la dispersion est, dans les cas défavorables, fortement réduite (voir, *e.g.*, figures 5.13). Il est à noter que la dichotomie, en commençant l’exploration au centre du domaine \mathcal{D} , tend à introduire un biais, suivant la direction de l’approche de la courbe de seuil.

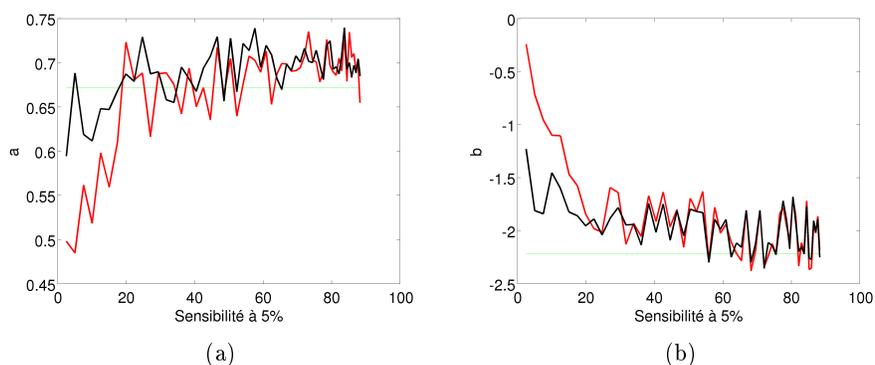


Figure 5.12 – Estimation des paramètres (a) : a et (b) : b , entre les courbes estimées par la méthode d'estimation de seuil perceptif multi-dimensionnel, sans correction (rouge) et avec correction (en noir), en fonction de la sensibilité à 5%, pour 20 participants.

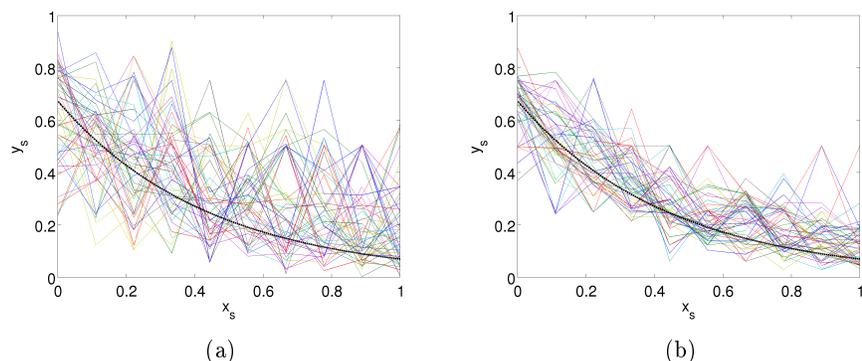


Figure 5.13 – Estimation de la courbe de seuil (courbes colorées), pour une sensibilité à 5% de 13%, pour 20 participants. La courbe de seuil perceptif cible est symbolisée par la courbe en pointillée noire. (a) : Sans prédiction-corrrection. (b) : avec prédiction-corrrection.

5.3 Validation expérimentale de l'algorithme

Guéniat *et al.* [65] ont soumis une méthode pour l'aide à la différenciation, par un utilisateur, de deux types de déplacement d'un bras haptique. Dans un cas, le déplacement $f_1(t) \propto t$ se fait à vitesse constante, tandis que, pour le second type de déplacement, la vitesse associée au déplacement $f_2(t) \propto \exp(t)$ augmente exponentiellement au fil du déplacement. Dans certaines configurations, par exemple si l'accélération est trop faible, seulement 67% des signaux sont correctement identifiés. Guéniat *et al.* [65] ont proposé de coupler, au déplacement, un signal vibrotactile lié au déplacement, afin d'améliorer le taux de différenciation [113]. Le signal $\hat{f}(t)$ résultant est :

$$\hat{f}(t) \propto \underbrace{f(t)}_{\text{signal}} + \underbrace{\cos\left(a \left(\frac{df}{dt}\right)^b (t) t\right)}_{\text{Discrimination}}, \quad (5.7)$$

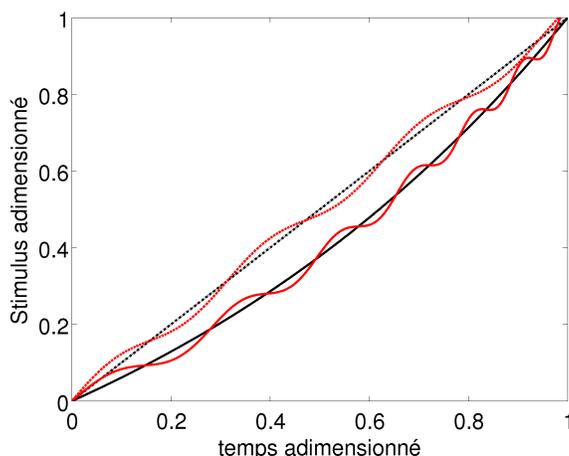


Figure 5.14 – Les courbes indiquent la position du bras, en fonction des conditions. Les courbes noires et rouges correspondent au stimulus kinesthésique respectivement sans ou avec le mode vibrotactile. Les courbes en pointillées correspondent à un stimulus linéaire, tandis que les courbes pleines correspondent à un signal non-linéaire.

avec $(a, b) = (1, 1)$. Ces signaux sont illustrés sur la figure 5.16. Cette méthode a permis d’augmenter significativement le taux de discrimination, à 80%. Néanmoins, ce taux n’est toujours pas de 100%. Pour augmenter ce taux, nous proposons d’étudier l’influence du couple de paramètres (a, b) (l’amplitude initiale a de la pseudo-fréquence, et l’accélération b de l’évolution de la pseudo-fréquence) sur la discrimination, *i.e.* d’identifier la courbe de seuil de discrimination dépendant des paramètres (a, b) . Formellement, la dimension de l’espace étudié $n_{\mathcal{D}}$ est donc 2. On identifie $\zeta = (a, b)$. La campagne suivante se base sur l’algorithme présenté dans sa forme numérique section 5.2.1.

5.3.1 Protocoles et conditions de l’expérience

Matériel et logiciel La plateforme expérimentale était installée sur un ordinateur de bureau. Le bras haptique utilisé était un PHANTOM OMNI de chez SENSABLE, positionné sur le bureau. Le logiciel comportait deux composantes. Une interface graphique afin de contrôler le déroulement de l’expérience (l’activation des stimuli) et pour enregistrer les réponses des participants, pour chaque stimulus proposé (nature du stimulus). Un second module permettait l’interface avec le bras, afin de proposer le signal haptique, suivant les conditions expérimentales présentées ci-dessous.

Pour l’identification de la courbe de seuil, il faut choisir une direction de dichotomisation, suivant l’un ou l’autre des paramètres. Pour chaque participant, ce choix était tiré au hasard au début de l’expérience. Sept itérations par point sont faites, afin de converger avec une erreur inférieure à 3% sur la courbe. L’espace est discrétisé en $n_d = 9$ points selon le second paramètre, uniformément distribués dans la plage prédéfinie. Ces deux choix permettent de s’assurer d’un nombre relativement faible (63) de stimuli présenté aux participants. Comme présenté dans la section précédente 5.2.1, la courbe de seuil perceptif est obtenue à la fin de l’expérience par une régression linéaire sur les neuf points

de l'espace des paramètres.

Participants Douze participants (tous masculins) ont passé l'expérience, au Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur (Université de Paris-Sud). Leurs âges étaient compris entre 22 et 57 ans (âge moyen $29 = \pm 9$).

Procédure Les sujets s'installent face à un écran, et tiennent le bras haptique de leur main dominante. Ils interagissent avec l'interface graphique via le clavier avec leur main non dominante (voir la figure 5.15).

Avant le début de l'expérience, l'expérimentateur donne une rapide description du contexte, de l'interface haptique et de la façon d'utiliser le logiciel pour donner les réponses. L'expérience commence par un court entraînement. Ensuite, quarante stimulus sont présentés aux sujets, avec des paramètres aléatoires, mais uniformément distribués dans un domaine, estimé par des pré-tests, tel que la différenciation entre des signaux linéaires et exponentiels est délicate. Dans chaque cas, les participants déclenchent le stimulus et confirment leur choix par l'interface graphique. L'expérience se termine par un court questionnaire subjectif. Le stimulus haptique présenté est selon l'axe horizontal, afin d'avoir les perceptions les plus précises pour le retour vibrotactile [83].



Figure 5.15 – Dispositif expérimental : l'utilisateur tient le bras haptique de sa main dominante, et interagit avec l'interface graphique avec son autre main. La boîte masque le dispositif haptique, pour éviter que le sujet observe les mouvements/oscillations du bras.

Les signaux sont présentées figure 5.16. Pour chaque signal, les sujets devaient préciser le signal qu'ils percevaient : linéaire ou non-linéaire.

Mesures Une seule mesure objective (mesure **MO1**) a été enregistrée lors de l'expérience, concernant les performances des utilisateurs. Les participants doivent choisir le signal qu'ils pensent avoir subi (linéaire ou non-linéaire).

Deux mesures subjectives proviennent d'un questionnaire posé aux sujets. A la fin de l'expérience, les participants devaient répondre à deux questions supplémentaires (sur

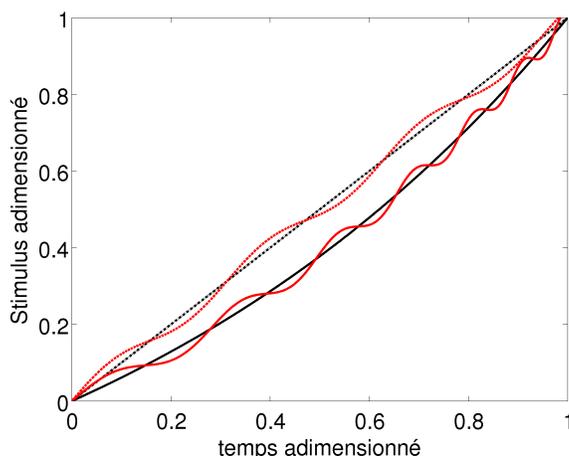


Figure 5.16 – Les courbes indiquent à la position du bras, en fonction des conditions. Les courbes noires et rouges correspondent au stimulus kinesthésique respectivement sans ou avec le mode vibrotactile. Les courbes en pointillées correspondent à un stimulus linéaire, tandis que les courbes pleines correspondent à un signal non-linéaire.

une échelle de Likert à 5 points, de 1 *Désaccord total* à 5 *accord total*). Les sujets devaient d'abord répondre à la première question avant de pouvoir lire la seconde. La première question posée à l'utilisateur était si il pensait avoir réussi à faire la différence entre les signaux linéaires et les signaux non-linéaires (**MS1**). La seconde question demandait si l'utilisateur avait remarqué que *tous* les signaux étaient non-linéaires (**MS2**). Ces questions permettent de vérifier que les participants n'avaient pas remarqués le fait que les stimuli étaient non-linéaires, et donc que les plages choisies de paramètres sont pertinentes.

5.3.2 Résultats

On intuite, en considérant les signaux haptiques proposés, que la courbe de seuil perceptif a une forme d'exponentielle. L'équation de la courbe-maîtresse est donc, pour chaque participant :

$$b_{tresh} = c_1 \exp(c_2 \cdot a_{tresh}), \quad (5.8)$$

Ce choix sera utilisé lors des calculs de minimisation par moindres carrés par la suite. Ce prétraitement est néanmoins général, et peut être mis en oeuvre quelque soit le type de courbe, par exemple en décrivant la courbe de seuil par une loi polynomiale.

Le résultat principal est une courbe-maîtresse pour tous les participants. Les courbes des participants représentent bien la dispersion autour d'une courbe unique (voir la figure 5.17). Les maître-paramètres sont $(c_{1m}, c_{2m}) = (-2.01 \pm 0.3, -3.96 \cdot 10^{-2} \pm 8 \cdot 10^{-3})$, que l'on retrouve illustrés figure 5.18(b) avec la courbe-maîtresse.

Le paramètre principal (car directement lié au comportement exponentiel), c_{2m} , suit bien une distribution normale (test de Shapiro : p-value $p = 0.698 \gg 0.05$). Le second paramètre, c_{1m} , suit également – plus faiblement – une distribution normale (test de Shapiro : p-value $p = 0.115 > 0.05$).

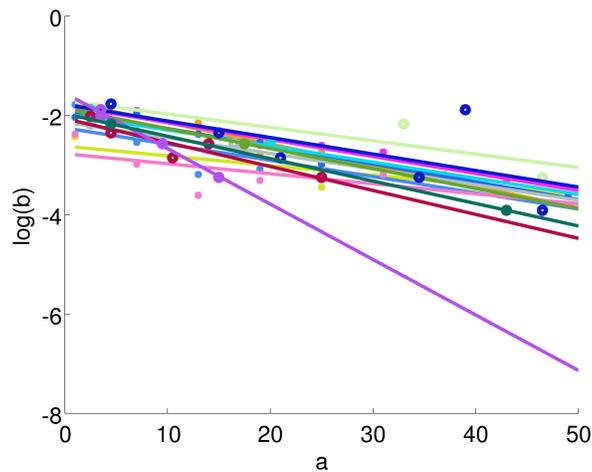


Figure 5.17 – Estimation des courbes de seuil perceptif individuelles (échelle semi-logarithmique), par régression linéaire. Un participant est exceptionnellement sensible au stimulus vibrotactile.

Le second paramètre converge mal. On veut donc vérifier les réponses individuelles, afin de s'assurer de la convergence des maîtres-paramètres. On construit donc la différence entre la courbe-maitresse JND et les réponses individuelles, point à point afin d'avoir un plus grand nombre d'échantillons. La renormalisation est faite par la courbe-maitresse. La figure 5.18(a) montre cette distribution. Le résultat est bien une distribution normale (test de Shapiro : p-value $p = 0.704 \gg 0.05$). Certains points sont très éloignés de la courbe-maitresse (figure 5.18(b)). On voit ici les limitations de l'utilisation d'une méthode de dichotomie pour l'identification d'un seuil perceptif *en un point*. Dès qu'un participant donne une réponse improbable, la méthode ne peut plus converger vers la courbe réelle. Néanmoins, pour l'identification globale d'une courbe, la convergence est assurée par la multiplicité des points et le fait que les réponses sont régies par des lois normales.

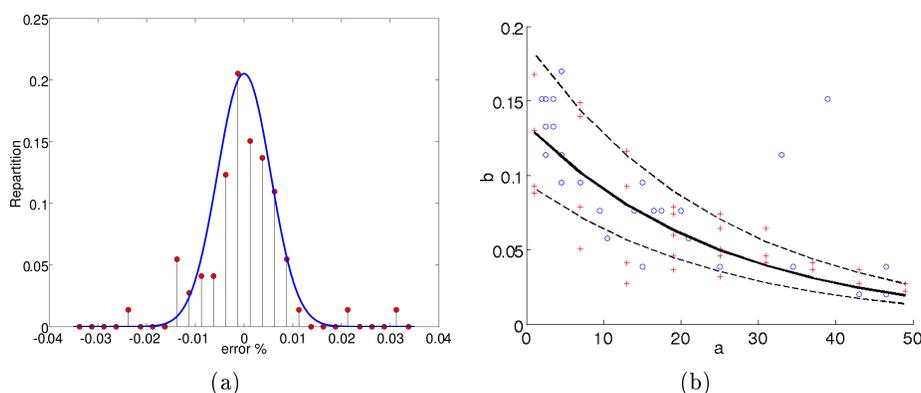


Figure 5.18 – (a) : Répartition des erreurs par rapport à la courbe-maitresse. (b) : Répartition des points sur la courbe seuil, pour tous les participants. Les cercles bleues résultent d’une dichotomie faite sur le paramètre b , tandis que les croix rouges sont pour le paramètre a . La courbe-maitresse seuil est symbolisée par la courbe continue noire, les courbes en pointillées représentent les déviations standards par rapport à cette courbe-maitresse.

Les mesures subjectives indiquent que les sujets étaient confiants dans leur réponses (indice moyen de 3.5, STD= 0.65 pour la réponse **MS1**). Comme attendu, les participants ne se sont pas rendus compte que tous les stimuli étaient non-linéaires (indice moyen de 1.67, STD= 1.1 pour la réponse **MS2**).

Bilan sur l’identification de seuil différentiel

La différenciation de stimuli sensoriel (par exemple, dans le cadre de la visualisation scientifique, la discrimination de deux couleurs en fonction du contraste et de la luminosité) est une question importante, en particulier dans le cadre de la visualisation de données scientifiques, bien que le champ applicatif soit particulièrement large. L’étude et l’identification de seuil différentiel dépendant de plusieurs paramètres a été présentée section 5.2.1. La méthode proposée se base sur une dichotomie selon les paramètres, pour identifier des points proches de la courbe de seuil différentiel. Les relations entre les paramètres peuvent être alors estimés par regression *ad hoc*. La méthode converge numériquement, et est particulièrement efficace, de plusieurs ordres de grandeur au sens de l’équation (5.1) comparée aux méthodes classiquement utilisées dans le cadre d’études psychophysiques.

Dans le cadre de l’expérience présentée section 5.3, seule une soixantaine de stimuli présentés par participant sont nécessaire pour l’identification de la relation entre les deux paramètres dont dépend la courbe de seuil différentiel. Il est à noter qu’une méthode adaptative requiert environ ce nombre de tests, pour identifier *un seul* point sur une courbe de seuil. Une courbe maitresse est également identifiée, semblant régir la discrimination quelque soit le sujet. L’existence d’une courbe maitresse permettrait l’utilisation de la méthode de prédiction-corrrection, proposée section 5.2.1.2, afin d’améliorer la précision, si besoin est, de l’identification des courbes de seuil différentiel.

Conclusion

Dans ces travaux, j'ai pu explorer différentes méthodes de réduction, de représentation et d'analyse d'un jeu de données issus de mécanique de fluides. La décomposition en modes dynamiques (DMD) est une méthode de décomposition modale récente, intensivement reprise par la communauté. Plusieurs méthodes, permettant de relaxer les contraintes imposées par la DMD, ont été exposées. L'identification de modes dynamiques est possible, comme pour une décomposition orthogonale aux valeurs propres, quelque soit le jeu de données. Ces méthodes ont été validées numériquement. Dans ce cadre se pose la question de l'identification de points d'espace au droit desquels les spécificités de la dynamique temporelle s'expriment de façon particulièrement représentative. Un critère a priori ou a posteriori de ces points a été proposé. La recherche de structures cohérentes m'a également poussé à proposer un algorithme efficace pour calculer le champ des exposants de Lyapunov à temps fini, pour un gain de temps de calcul de plusieurs ordres de grandeurs, ouvrant la voie aux calculs en trois dimensions.

Ces outils ont ensuite été appliqués pour l'analyse d'un écoulement de cavité ouverte. Une étude de phénomènes tri-dimensionnels à partir de réalisations en deux dimensions a été effectuée, validée ensuite par la bonne correspondance entre les structures en deux dimensions issues de réalisations expérimentales, et des structures en trois dimensions calculées à partir de réalisations numériques. Les mécanismes de mélange ont été abordés. Le couplage entre la dynamique de l'écoulement intra-cavitaire et la dynamique de la couche cisailée a été mis en évidence par les décompositions modales. Le phénomène d'intermittence, néanmoins, reste inexpliqué, et la modélisation de la transition d'un état à un autre n'est toujours pas réalisée.

La nécessité d'explorer des données dépendantes du temps, à trois dimensions, m'a conduit à m'intéresser aux méthodes de visualisation et d'exploration de grandes bases de données. Des métaphores innovantes d'interaction et d'exploration, ayant un champ applicatif large, ont été proposées, afin de manipuler directement des données et, plus généralement, d'explorer interactivement des univers. La principale métaphore est d'utiliser une fenêtre tangible vers un nouvel environnement, en réalité mixte. Typiquement, cet univers représente, dans le cadre de la mécanique des fluides, des champs de données tri-dimensionnelles, tel qu'un champ de température ou d'exposants de Lyapunov à temps fini, parfois dépendant du temps. L'utilisation d'objets tangibles, spécifiquement conçus, permet une réalisation de tâches complexes, tel que positionner un plan de coupe, plus efficacement dans cet univers. Des évolutions sont prévues, telle que la manipulation sans contact, et des interfaces multimodales.

La visualisation de données tient du domaine de la psychophysique. Il faut pouvoir s'assurer que l'utilisateur perçoit correctement les données que le système lui soumet,

et n'interprète pas, sur un ressenti erroné des stimuli, un mécanisme non-pertinent. Les études identifiant ces limites perceptives, à ce jour, n'ont été réalisées que pour des stimuli dépendant d'un seul paramètre. J'ai donc proposé et testé une méthode permettant l'estimation de seuils perceptifs en dimension quelconque. Cet algorithme est suffisamment efficace pour que l'identification d'une courbe de seuil perceptif dépendant de deux paramètres ait un coût comparable à l'identification de seuil perceptif en dimension un par une méthode standard.

Bibliographie

- [1] AGUIRRE, L., AND LETELLIER, C. Investigating observability properties from data in nonlinear dynamics. *Phys. Rev. E* 83 (2011).
- [2] ALLEN, J., AND NEELY, S. Modeling the relation between the intensity just-noticeable difference and loudness for pure tones and wideband noise. *The Journal of the Acoustical Society of America* 102 (1997), 3628.
- [3] ARNOLDI, W. E. The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Quarterly of Applied Mathematics* 9 (1951), 17–29.
- [4] B. HASSELBLATT, B., AND KATOK, A. *Handbook of dynamical systems*, vol. 1. Elsevier, 2002.
- [5] BALASURIYA, S. Explicit invariant manifolds and specialised trajectories in a class of unsteady flows. *Physics of Fluids* 24 (2012), 127101.
- [6] BASLEY, J. *An Experimental Investigation on Waves and Coherent Structures in a Three-dimensional Open Cavity Flow*. PhD Thesis, 2012.
- [7] BASLEY, J., PASTUR, L. R., LUSSEYRAN, F., FAURE, T. M., AND DELPRAT, N. Experimental investigation of global structures in an incompressible cavity flow using time-resolved piv. *Experiments in Fluids* 50 (2010), 905–918.
- [8] BATES, P., LU, K., AND ZENG, C. Approximately invariant manifolds and global dynamics of spike states. *Inventiones mathematicae* 174, 2 (2008), 355–433.
- [9] BEIGIE, D., LEONARD, A., AND WIGGINS, S. Chaotic transport in the homoclinic and heteroclinic tangle regions of quasiperiodically forced two-dimensional dynamical systems. *Nonlinearity* 4, 3 (1991), 775.
- [10] BEIGIE, D., LEONARD, A., AND WIGGINS, S. Invariant manifold templates for chaotic advection. *Chaos, Solitons & Fractals* 4, 6 (1994), 749–868.
- [11] BERKOOZ, G., HOLMES, P., AND LUMLEY, J. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* 25 (1993), 539–575.
- [12] BERTELSEN, A., IRARRAZAVAL, P., AND CADIZ, R. Volume visualization using a spatially aware mobile display device. *Computerized Medical Imaging and Graphics* 36, 1 (2012), 66–71.
- [13] BONANNI, L., ALONSO, J., CHAO, N., VARGAS, G., AND ISHII, H. Handsaw : tangible exploration of volumetric data by direct cut-plane projection. In *Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems* (2008), ACM, pp. 251–254.

- [14] BORLAND, D., AND TAYLOR, R. I. Rainbow color map (still) considered harmful. *IEEE Computer Graphics and Applications* 27, 2 (2007), 14–17.
- [15] BRANICKI, M., AND WIGGINS, S. Finite-time lagrangian transport analysis : stable and unstable manifolds of hyperbolic trajectories and finite-time lyapunov exponents. *arXiv preprint arXiv :0908.1129* (2009).
- [16] BRÈS, G. A., AND COLONIUS, T. Three-dimensional instabilities in compressible flow over open cavities. *J. Fluid Mech* 599 (2008), 309–339.
- [17] BROWN, G., AND ROSHKO, A. On density effects and large structure in turbulent mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics* 64, 4 (1974), 775–816.
- [18] BRUNTON, S., AND ROWLEY, C. Fast computation of finite-time lyapunov exponent fields for unsteady flows. *Chaos* 20 (2010).
- [19] BURIGAT, S., AND CHITTARO, L. Navigation in 3d virtual environments : Effects of user experience and location-pointing navigation aids, 2007.
- [20] BUTKIEWICZ, T., AND WARE, C. Exploratory analysis of ocean flow models with stereoscopic multi-touch.
- [21] BUXTON, W. Chunking and phrasing and the design of human-computer dialogues. pp. 475–480.
- [22] CAMASSA, R., AND WIGGINS, S. Chaotic advection in a rayleigh benard flow. *Phys. Rev. A* 43 (1991), 774 – 794.
- [23] CAMMILLERI, A., GUÉNIAT, F., CARLIER, J., PASTUR, L., MEMIN, E., LUSSEYRAN, F., AND ARTANA, G. Pod-spectral decomposition for fluid flow analysis and model reduction. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* (2013), 1–29.
- [24] CARPENDALE, S. Evaluating information visualizations. *Information Visualization : Human-Centered Issues and Perspectives* 4950 (2008), 19–45.
- [25] CHASSAING, P. Turbulence en mécanique des fluides. *Cépaduès ed* (2000).
- [26] CHEN, K., TU, J., AND ROWLEY, C. Variants of dynamic mode decomposition : Boundary condition, koopman, and fourier analyses. *Journal of Nonlinear Science* 22 (2012), 887–915.
- [27] CIRIO, G., VANGORP, P., CHAPOULIE, E., MARCHAL, M., LÉCUYER, A., AND DRETTAKIS, G. Walking in a cube : Novel metaphors for safely navigating large virtual environments in restricted real workspaces. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proceedings of IEEE Virtual Reality)* 18, 4 (2012).
- [28] COFFEY, D., MALBRAATEN, N., LE, T., BORAZJANI, I., SOTIROPOULOS, F., AND KEEFE, D. A multi-surface, multi-touch interface for overview and detail exploration of volume datasets in virtual reality. pp. 191–198.
- [29] CONTI, C., ROSSINELLI, D., AND KOUMOUTSAKOS, P. Gpu and apu computations of finite time lyapunov exponent fields. *Journal of Computational Physics* 231 (2012), 2229–2244.
- [30] CORDIER, L., AND BERGMANN, M. *Post-processing of experimental and numerical data*. on Karman Institute for Fluid Dynamics, 2003.

- [31] DEESE, H., PRATT, L., AND HELFRICH, K. A laboratory model of exchange and mixing between western boundary layers and subbasin recirculation gyres*. *Journal of physical oceanography* 32, 6 (2002), 1870–1889.
- [32] DELLNITZ, M., AND A. HOHMANN, JOURNAL=NUMERISCHE MATHEMATIK, V. N. P. Y. P. A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors.
- [33] DELLNITZ, M., HOHMANN, A., JUNGE, O., AND RUMPF, M. Exploring invariant sets and invariant measures. *CHAOS : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 7, 2 (1997), 221–228.
- [34] DONG, X., YOSHIDA, K., AND STOFFREGEN, T. Control of a virtual vehicle influences postural activity and motion sickness. *Journal of Experimental Psychology : Applied* 17, 2 (2011), 128.
- [35] DUA, P., WEBERA, R., LUSZCZEKA, P., TOMOVA, S., PETERSONA, G., AND DONGARRAA, J. From cuda to opencl : Towards a performance-portable solution for multi-platform gpu programming. *Parallel Computing* 38 (2012), 391–407.
- [36] DUKE, D., SORIA, J., AND HONNERY, D. An error analysis of the dynamic mode decomposition. *Experiments in Fluids* 52 (2012), 529–542.
- [37] ECKHARDT, B., SCHNEIDER, T., HOF, B., AND WESTERWEEL, J. Turbulence transition in pipe flow. *Ann. rev. of Fluid Mech* 39 (2007), 447–468.
- [38] EDWARDS, W., TUCKERMAN, L., FRIESNER, R., AND SORENSEN, D. Krylov methods for the incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics* 110, 1 (1994), 82–102.
- [39] EICHENBERGER, A., WU, P., AND O’BIEN, K. Vectorization for simd architectures with alignment constraints.
- [40] EISINBERG, A., AND FEDELE, G. On the inversion of the vandermonde matrix. *Applied mathematics and computation* 174, 2 (2006), 1384–1397.
- [41] EVERSON, R., AND SIROVICH, L. Karhunen-loeve procedure for gappy data. *JOSA A* 12, 8 (1995), 1657–1664.
- [42] FALCOU, J., SÉROT, J., PECH, L., AND LAPRESTÉ, J. Meta-programming applied to automatic smp parallelization of linear algebra code. pp. 729–738.
- [43] FALMAGNE, J. Psychophysical measurement and theory. *Handbook of perception and human performance* 1 (1986), 124–127.
- [44] FARAZMAND, M., AND HALLER, G. Attracting and repelling lagrangian coherent structures from a single computation. *Chaos* 23, 2 (2013).
- [45] FAURE, T., PASTUR, L., LUSSEYRAN, F., FRAIGNEAU, Y., AND BISCH, D. Three-dimensional centrifugal instabilities development inside a parallelepipedic open cavity of various shape. *Experiments in Fluids* 47 (2009), 395–410.
- [46] FITZMAURICE, G. Situated information spaces and spatially aware palmtop computers. *Communications of the ACM* 36, 7 (1993), 39–49.
- [47] FITZMAURICE, G. *Graspable user interfaces*. PhD thesis, Citeseer, 1996.
- [48] FORLINES, C., AND SHEN, C. Dtlens : Multi-user tabletop spatial data exploration. pp. 119–122.

- [49] FOUNTAIN, G., KHAKHAR, D., MEZIĆ, I., AND OTTINO, J. Chaotic mixing in a bounded three-dimensional flow. *J. Fluid Mech* 417 (2000), 265–301.
- [50] FRÖHLICH, B., AND PLATE, J. The cubic mouse : a new device for three-dimensional input. In *Proceedings of the SIGCHI conference on Human factors in computing systems* (2000), ACM, pp. 526–531.
- [51] FROYLAND, G. Approximating physical invariant measures of mixing dynamical systems in higher dimensions. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications* 32, 7 (1998), 831–860.
- [52] FROYLAND, G. Statistically optimal almost-invariant sets. *Physica D : Nonlinear Phenomena* 200, 3 (2005), 205–219.
- [53] FROYLAND, G., AND DELLNITZ, M. Detecting and locating near-optimal almost-invariant sets and cycles. *SIAM Journal on Scientific Computing* 24, 6 (2003), 1839–1863.
- [54] FROYLAND, G., SANTITISSADEEKORN, N., AND MONAHAN, A. Transport in time-dependent dynamical systems : finite-time coherent sets. *Chaos* 20 (2010).
- [55] FU, C., GOH, W., AND NG, J. Multi-touch techniques for exploring large-scale 3d astrophysical simulations. pp. 2213–2222.
- [56] GARG, S., AND CATTAFESTA, L. Quantitative schlieren measurements of coherent structures in a cavity shear layer. *Experiments in fluids* 30, 2 (2001), 123–134.
- [57] GIBSON, J. The theory of affordances. In *Perceiving, acting, and knowing : Toward an ecological psychology*, R. E. Shaw and J. Bransford, Eds. Lawrence Erlbaum Associates, 1977, p. 67–82.
- [58] GIEST, K., PARLITZ, U., AND LAUTERBORN, W. Comparison of different methods for computing lyapunov exponents. *Progress of Theoretical Physics* 83.
- [59] GOHBERG, I., AND OLSHEVSKY, V. The fast generalized parker–traub algorithm for inversion of vandermonde and related matrices. *Journal of Complexity* 13, 2 (1997), 208–234.
- [60] GOLUB, G., AND LOAN, C. V. *Matrix Computations (3rd ed.)*. Johns Hopkins University Press, 1996.
- [61] GREEBERG, S., AND BUXTON, B. Usability evaluation considered harmful (some of the time). pp. 111–120.
- [62] GREEN, M., ROWLEY, C., AND HALLER, G. Detection of lagrangian coherent structures in 3d turbulence. *J. Fluid Mech* 572 (2007), 111–120.
- [63] GRUNWALD, D., ZORN, B., AND HENDERSON, R. Improving the cache locality of memory allocation. In *ACM SIGPLAN Notices* (1993), vol. 28, ACM, pp. 177–186.
- [64] GUÉNIAT, F., CHRISTOPHE, J., GAFFARY, Y., GIRARD, A., AND AMMI, M. Tangible windows for a free exploration of wide 3d virtual environment. In *Proceedings of the 19th ACM Symposium on Virtual Reality Software and Technology* (2013), ACM, pp. 115–118.
- [65] GUÉNIAT, F., GAFFARY, Y., PASTUR, L., AND AMMI, M. Haptic stimulus for the discrimination between intrinsic properties of dynamic systems. In *Haptics : Perception, Devices, Mobility, and Communication*. Springer, 2012, pp. 37–42.

- [66] HACHET, M., DECLE, F., KNÖDEL, S., AND GUITTON, P. Navidget for easy 3d camera positioning from 2d inputs. pp. 83–89.
- [67] HALL, J. Hybrid adaptive procedure for estimation of psychometric functions. *The Journal of the Acoustical Society of America* 69 (1981), 1763.
- [68] HALLER, G. An objective definition of a vortex. *J. Fluid Mech* 525.
- [69] HALLER, G. A variational theory of hyperbolic lagrangian coherent structures. *Physica D* 240.
- [70] HALLER, G. Finding finite-time invariant manifolds in two-dimensional velocity fields. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 10, 1 (2000), 99–108.
- [71] HALLER, G. Lagrangian structures and the rate of strain in a partition of two-dimensional turbulence. pp. 3365–3385.
- [72] HALLER, G. Lagrangian coherent structures from approximate velocity data. *Phys. Fluids A* (2002), 1851–1861.
- [73] HALLER, G., AND POJE, A. Finite time transport in aperiodic flows. *Physica D : Nonlinear Phenomena* 119, 3 (1998), 352–380.
- [74] HANCOCK, M., CARPENDALE, S., AND COCKBURN, A. Shallow-depth 3d interaction : design and evaluation of one-, two-and three-touch techniques. In *Proceedings of the SIGCHI conference on Human factors in computing systems* (2007), ACM, pp. 1147–1156.
- [75] HANCOCK, M., CATE, T. T., AND CARPENDALE, S. Sticky tools : Full 6dof force-based interaction for multi-touch tables. pp. 145–152.
- [76] HARRISON, C., AND GLATZMAIER, G. Lagrangian coherent structures in the california current system – sensitivities and limitations. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* 106 (2010), 22–44.
- [77] HILLIGES, O., KIM, D., IZADI, S., WEISS, M., AND WILSON, A. Holodesk : direct 3d interactions with a situated see-through display. In *Proceedings of the 2012 ACM annual conference on Human Factors in Computing Systems* (2012), ACM, pp. 2421–2430.
- [78] HINCKLEY, K., PAUSCH, R., GOBLE, J., AND KASSELL, N. Passive real-world interface props for neurosurgical visualization. In *Proceedings of the SIGCHI conference on Human factors in computing systems : celebrating interdependence* (1994), ACM, pp. 452–458.
- [79] HOFFMAN, D. Vergence accommodation conflicts hinder visual performance and cause visual fatigue. In *IJVR* 8 (2008), p. 33.
- [80] HOLMES, P., LUMLEY, J., AND BERKOOZ, G. *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*. Cambridge university press, 1998.
- [81] HORNECKER, E., MARSHALL, P., DALTON, N., AND ROGERS, Y. Collaboration and interference : Awareness with mice or touch input. pp. 167–176.
- [82] HUSSAIN, A. Coherent structures and turbulence. *Journal of Fluid Mechanics* 173, 303 (1986).

- [83] HWANG, J., AND HWANG, W. Vibration perception and excitatory direction for haptic devices. *Journal of Intelligent Manufacturing* 22 (2009), 17–27.
- [84] ISENBERG, T. Position paper : Touch interaction in scientific visualization.
- [85] ISENBERG, T., EVERTS, M., GRUBERT, K., AND CARPENDALE, S. Interactive exploratory visualization of 2d vector. pp. 983–990.
- [86] ISENBERG, T., AND HANCOCK, M. Gestures vs. postures : ‘gestural’ touch interaction in 3d environments.
- [87] ISHII, H., AND ULLMER, B. Tangible bits : towards seamless interfaces between people, bits and atoms. In *Proceedings of the ACM SIGCHI Conference on Human factors in computing systems* (1997), p. 234–241.
- [88] IZADI, S., KIM, D., HILLIGES, O., MOLYNEAUX, D., NEWCOMBE, R., KOHLI, P., SHOTTON, J., HODGES, S., FREEMAN, D., DAVISON, A., ET AL. Kinectfusion : real-time 3d reconstruction and interaction using a moving depth camera. In *Proceedings of the 24th annual ACM symposium on User interface software and technology* (2011), ACM, pp. 559–568.
- [89] JEONG, J., AND HUSSAIN, F. On the identification of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics* 285, 69 (1995), 69–94.
- [90] KAERNBACH, C. Simple adaptive testing with the weighted up-down method. *Attention, Perception, & Psychophysics* 49, 3 (1991), 227–229.
- [91] KALMAN, R. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering* 82, 1 (1960), 35–45.
- [92] KALTENBRUNNER, M., BOVERMANN, T., BENCINA, R., AND COSTANZA, E. Tuio : A protocol for table-top tangible user interfaces.
- [93] KAPRI, A. V., RICK, T., AND FEINER, S. Comparing steering-based travel techniques for search tasks in a cave. In *Virtual Reality Conference (VR), 2011 IEEE* (2011), IEEE, pp. 91–94.
- [94] KENNEDY, R., LANE, N., LILIENTHAL, M., BERBAUM, K., AND HETTINGER, L. Profile analysis of simulator sickness symptoms : Application to virtual environment systems. *Presence : Teleoperators and Virtual Environments* 1, 3 (1992), 295–301.
- [95] KERSCHEN, G., GOLINVAL, J., VAKAKIS, A., AND BERGMAN, L. The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems : an overview. *Nonlinear Dynamics* 41, 1-3 (2005), 147–169.
- [96] KIM, S., TRESKUNOV, A., AND MARTI, S. Drive : Directly reaching into virtual environment with bare hand manipulation behind mobile display. In *3D User Interfaces (3DUI), 2011 IEEE Symposium on* (2011), IEEE, pp. 107–108.
- [97] KIN, K., AGRAWALA, M., AND DEROSE, T. Determining the benefits of direct-touch, bimanual, and multifinger input on a multitouch workstation. pp. 119–124.
- [98] KITTLER, J., AND ILLINGWORTH, J. On threshold selection using clustering criteria. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 5 (1985), 652–655.
- [99] KLEIN, T., GUÉNIAT, F., PASTUR, L., VERNIER, F., AND ISENBERG, T. A design study for direct-touch interaction for exploratory 3d scientific visualization.

- [100] KOOPMAN, B. Hamiltonian systems and transformations in hilbert space. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 17 (1931), 315–318.
- [101] KRUSZYŃSKI, K., AND LIERE, R. V. Tangible props for scientific visualization : concept, requirements, application. *Virtual reality* 13, 4 (2009), 235–244.
- [102] KUNDU, P., ALLEN, J., AND SMITH, R. Modal decomposition of the velocity field near the oregon coast. *J. Phys. Oceanogr* 5, 4 (1975), 683–704.
- [103] KUSCH, H., AND OTTINO, J. Experiments on mixing in continuous chaotic flows. *Journal of Fluid Mechanics* 236, 1 (1992), 319–348.
- [104] LAUGHLIN, S. A simple coding procedure enhances a neuron’s information capacity. *Z. Naturforsch* 36, 910-912 (1981), 51.
- [105] LCS-TOOL. Nonlinear dynamical systems group *ETH Zurich*. <https://github.com/jeixav/LCS-Tool>.
- [106] LEE, T., AND HOLLERER, T. Handy ar : Markerless inspection of augmented reality objects using fingertip tracking. In *Wearable Computers, 2007 11th IEEE International Symposium on* (2007), IEEE, pp. 83–90.
- [107] LEEK, M. Adaptive procedures in psychophysical research. *Perception and Psychophysics* 63 (2001), 1279–1292.
- [108] LEKIEN, F., COULLIETTE, C., MARIANO, A., RYAN, E., SHAY, L., HALLER, G., AND MARSDEN, J. The correlation between surface drifters and coherent structures based on hf radar in monterey bay. *Deep-Sea Research* 56.
- [109] LEKIEN, F., AND ROSS, S. The computation of finite-time lyapunov exponents on unstructured meshes and for non-euclidean manifolds. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 20, 1 (2010), 017505–017505.
- [110] LEKIEN, F., SHADDEN, S., AND MARSDEN, J. Lagrangian coherent structures in n-dimensional systems. *Journal of Mathematical Physics* 48 (2007).
- [111] LEVITT, H. Transformed up-down methods in psychoacoustics. *The Journal of the Acoustical society of America* 49 (1971), 467.
- [112] LIGHT, A., AND BARTLEIN, P. The end of the rainbow? color schemes for improved data graphics. *Eos, Transactions American Geophysical Union* 85, 40 (2004), 385–391.
- [113] LOOMIS, S. L. J., AND WILLIAM, D. The role of vibration in the tactual perception of roughness. *Percept Psychophys* 32 (1982), 109–116.
- [114] LORENZ, E. Irregularity : a fundamental property of the atmosphere*. *Tellus A* 36, 2 (1984), 98–110.
- [115] LUNDSTRÖM, C., RYDELL, T., FORSELL, C., PERSSON, A., AND YNNERMAN, A. Multi-touch table system for medical visualization : Application to orthopedic surgery planning. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 17, 12 (2011), 1775–1784.
- [116] LUSSEYRAN, F., PASTUR, L., AND LETELLIER, C. Dynamical analysis of an intermittency in an open cavity flow. *Physics of Fluids* 20 (2008).
- [117] M. SCARPA, R.G. BELLEMAN, P. S. Wivr : Window in virtual reality.

- [118] MAGUIRE, M. Methods to support human-centred design. *International journal of human-computer studies* 55, 4 (2001), 587–634.
- [119] MALHOTRA, N., MEZIĆ, I., AND WIGGINS, S. Patchiness : A new diagnostic for lagrangian trajectory analysis in time-dependent fluid flows. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 8, 06 (1998), 1053–1093.
- [120] MALHOTRA, N., AND WIGGINS, S. Geometric structures, lobe dynamics, and lagrangian transport in flows with aperiodic time-dependence, with applications to rossby wave flow. *Journal of nonlinear science* 8, 4 (1998), 401–456.
- [121] MAMUN, C., AND TUCKERMAN, L. Asymmetry and hopf bifurcation in spherical couette flow. *Physics of Fluids* 7 (1995), 80.
- [122] MATSUOKA, S., AOKI, T., ENDO, T., NUKADA, A., KATO, T., AND HASEGAWA, A. Gpu accelerated computing-from hype to mainstream, the rebirth of vector computing. *Scientific Discovery Through Advanced Computing* 180 (2009).
- [123] MESEGUER-GARRIDO, F., DE VICENTE, J., VALERO, E., AND THEOFILIS, V. Effect of aspect ratio on the three-dimensional global instability analysis of incompressible open cavity flows.
- [124] MEZIC, I. Analysis of fluid flows via spectral properties of the koopman operator. *Annual Review of Fluid Mechanics* 45 (2013), 357–378.
- [125] MEZIĆ, I., AND SOTIROPOULOS, F. Ergodic theory and experimental visualization of invariant sets in chaotically advected flows. *Physics of Fluids* 14 (2002), 2235.
- [126] MEZIĆ, I., AND WIGGINS, S. A method for visualization of invariant sets of dynamical systems based on the ergodic partition. *Chaos* 9, 1 (1999), 213–218.
- [127] MILLER, P., JONES, C., ROGERSON, A., AND PRATT, L. Quantifying transport in numerically generated velocity fields. *Physica D : Nonlinear Phenomena* 110, 1 (1997), 105–122.
- [128] MOUNTCASTLE, V., STEINMETZ, M., AND ROMO, R. Frequency discrimination in the sense of flutter : psychophysical measurements correlated with postcentral events in behaving monkeys. *The Journal of Neuroscience* 10, 9 (1990), 3032–3044.
- [129] MULDER, J., AND VAN-LIERE, R. The personal space station : Bringing interaction within reach. In *Proceedings of the virtual reality international conference, VRIC* (2002), vol. 2002, Citeseer, pp. 73–81.
- [130] NEARY, M. D., AND STEPHANOFF, K. D. Shear-layer-driven transition in a rectangular cavity. *Phys. Fluids* 30 (1987), 2936–2946.
- [131] OHNO, N., KAGEYAMA, A., AND KUSANO, K. Virtual reality visualization by cave with vfive and vtk. *Journal of plasma physics* 72, 6 (2006), 1069–1072.
- [132] OTTINO, J. *The kinematics of mixing : stretching, chaos, and transport*, vol. 3. Cambridge University Press, 1989.
- [133] PACKARD, N., CRUTCHFIELD, J., FARMER, J., AND SHAW, R. Geometry from a time series. *Phys. Rev. Lett* 45 (1980), 712–716.
- [134] PAPADIMITRIOU, C. *Computational complexity*. John Wiley and Sons Ltd., 2003.
- [135] PAPAGIANNAKIS, G., SINGH, G., AND MAGNENAT-THALMANN, N. A survey of mobile and wireless technologies for augmented reality systems. *Computer Animation and Virtual Worlds* 19, 1 (2008), 3–22.

- [136] PASTUR, L., LUSSEYRAN, F., FAURE, T., FRAIGNEAU, Y., PETHIEU, R., AND DEBESSE, P. Quantifying the non-linear mode competition in the flow over an open cavity at medium reynolds number. *Experiments in Fluids* 44 (2008), 597–608.
- [137] POJE, A., HALLER, G., AND MEZIĆ, I. The geometry and statistics of mixing in aperiodic flows. *Physics of Fluids* 11 (1999), 2963.
- [138] POURANSARI, Z., SPEETJENS, M., AND CLERCX, J. Formation of coherent structures by fluid inertia in three-dimensional laminar flows. *J. Fluid Mech.* 654 (2010), 5 – 34.
- [139] QI, W., AND MARTENS, J. Tangible user interfaces for 3D clipping plane interaction with volumetric data : a case study. In *Proceedings of the 7th international conference on Multimodal interfaces* (New York, NY, USA, 2005), ICMI '05, ACM, p. 252–258.
- [140] REICHEL, L. Fast qr decomposition of vandermonde-like matrices and polynomial least squares approximation. *SIAM journal on matrix analysis and applications* 12, 3 (1991), 552–564.
- [141] REISMAN, J., DAVIDSON, P., AND HAN, J. A screen-space formulation for 2d and 3d direct manipulation. pp. 69–78.
- [142] ROBBINS, H., AND MONRO, S. A stochastic approximation method. *The Annals of Mathematical Statistics* (1951), 400–407.
- [143] ROBLES-DE-LA-TORRE, G. The importance of the sense of touch in virtual and real environments. *IEEE MultiMedia* 13, 3 (2006), 24–30.
- [144] ROCKWELL, D. Prediction of oscillation frequencies for unstable flow past cavities. In *ASME Numerical/Laboratory Computer Methods in Fluid Mechanics* (1976), vol. 1.
- [145] ROGERS, M., AND MOSER, R. Spanwise scale selection in plane mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics* 247 (1993), 321–337.
- [146] ROGERS, Y., AND LINDLEY, S. Collaborating around vertical and horizontal large interactive displays : Which way is best ? *Interacting with Computers* 16, 6 (2004), 1133–1152.
- [147] ROGOWITZ, B., TREINISH, L., AND BRYSON, S. How not to lie with visualization. *Computers in Physics* 10, 3 (1996), 268–273.
- [148] ROM-KEDAR, V. Transport rates of a class of two-dimensional maps and flows. *Physica D : Nonlinear Phenomena* 43, 2 (1990), 229–268.
- [149] ROM-KEDAR, V., LEONARD, A., AND WIGGINS, S. An analytical study of transport, mixing and chaos in an unsteady vortical flow. *Journal of Fluid Mechanics* 214 (1990), 347–394.
- [150] ROSSITER, J., AND BRITAIN, G. Wind tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds.
- [151] ROWLEY, C., COLONIUS, T., AND BASU, A. On self-sustained oscillations in two-dimensional compressible flow over rectangular cavities. *Journal of Fluid Mechanics* 455, 1 (2002), 315–346.

- [152] ROWLEY, C. W., MEZIC, I., BAGHERI, S., SCHLATTER, P., AND HENNINGSON, D. S. Spectral analysis of nonlinear flows. *Journal of Fluid Mechanics* 641 (2009), 115–127.
- [153] RUIJTERS, D., AND THÉVENAZ, P. Gpu prefilter for accurate cubic b-spline interpolation. *The Computer Journal* 55 (2012), 15–20.
- [154] RYU, H., AND MONK, A. Analysing interaction problems with cyclic interaction theory : Low-level interaction walkthrough. *PsychNology Journal* 2, 3 (2004), 304–330.
- [155] SCHMID, P. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *Journal of Fluid Mechanics* 656 (2010), 6–28.
- [156] SCHMID, P., LI, L., JUNIPER, M., AND PUST, O. Applications of the dynamic mode decomposition. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 25, 1-4 (2011), 249–259.
- [157] SCHMID, P., AND SESTERHENN, J. Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows.
- [158] SCHMID, P., AND SESTERHENN, J. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data.
- [159] SCHULER, D., AND NAMOIKA, A. *Participatory Design : Principles and Practices*. CRC Press, 1993.
- [160] SELLEN, A., KURTENBACH, G., AND BUXTON, W. The prevention of mode errors through sensory feedback. *Human Computer Interaction* 7 (1992), 141–164.
- [161] SHADDEN, S., DABIRI, J., AND MARSDEN, J. Lagrangian analysis of fluid transport in empirical vortex ring flows. *Physics of Fluids* 18.
- [162] SHADDEN, S., LEKIEN, F., AND MARSDEN, J. Definition and properties of lagrangian coherent structures from finite-time lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows. *Physica D* 212.
- [163] SHAER, O., AND HORNECKER, E. Tangible user interfaces : past, present, and future directions. *Foundations and Trends in Human-Computer Interaction* 3, 1–2 (2010), 1–137.
- [164] SIROVICH, L. Turbulence and the dynamics of coherent structures. i-coherent structures. ii-symmetries and transformations. iii-dynamics and scaling. *Quarterly of applied mathematics* 45 (1987), 561–571.
- [165] STENHOLT, R. Efficient selection of multiple objects on a large scale. pp. 105–112.
- [166] SUBRAMANIAN, S. *Tangible interfaces for volume navigation*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2004.
- [167] SULTANUM, N., SOMANATH, S., SHARLIN, E., AND SOUSA, M. “point it, split it, peel it, view it” : Techniques for interactive reservoir visualization on tabletops. pp. 192–201.
- [168] SULTANUM, N., SOMANATH, S., SHARLIN, E., SOUSA, M., MIRANDA-FILHO, D., AND EASTICK, R. Touching the depths : Introducing tabletop interaction to reservoir engineering. pp. 105–108.

- [169] TAKENS, F. Detecting strange attractors in turbulence. In *Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980*. Springer, 1981, pp. 366–381.
- [170] TALLAPRAGADA, P., AND ROSS, S. A set oriented definition of finite-time lyapunov exponents and coherent sets. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 18.
- [171] TAYLOR, M. On the efficiency of psychophysical measurement. *The Journal of the Acoustical Society of America* 49 (1971), 505.
- [172] TAYLOR, M., AND CREELMAN, C. Pest : Efficient estimates on probability functions. *The Journal of the Acoustical Society of America* 41 (1967), 782.
- [173] TEATHER, R. J., AND STUERZLINGER, W. Guidelines for 3d positioning techniques. pp. 61–68.
- [174] TREUTWEIN, B. Adaptive psychophysical procedures. *Vision research* 35, 17 (1995), 2503–2522.
- [175] TSANG, M., FITZMAURICE, G., KURTENBACH, G., KHAN, A., AND BUXTON, B. Boom chameleon : simultaneous capture of 3D viewpoint, voice and gesture annotations on a spatially-aware display. In *Proceedings of the 15th annual ACM symposium on User interface software and technology* (New York, NY, USA, 2002), UIST '02, ACM, p. 111–120.
- [176] WARE, C. *Information visualization*, vol. 2. Morgan Kaufmann San Francisco, 2000.
- [177] WARE, C., AND ROSE, J. Rotating virtual objects with real handles. *ACM Transactions on Computer-Human Interaction (TOCHI)* 6, 2 (1999), 162–180.
- [178] WEINHARDT, M. Pipeline vectorization. pp. 234–248.
- [179] YU, L., SVETACHOV, P., ISENBERG, P., EVERTS, M., AND ISENBERG, T. Direct-touch interaction for the exploration of 3d scientific visualization spaces. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 16, 6 (2010), 1613–1622.
- [180] ZHAI, S., AND MILGRAM, P. Quantifying coordination in multiple DOF movement and its application to evaluating 6 DOF input devices. In *Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems* (New York, NY, USA, 1998), CHI '98, ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., p. 320–327.